

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання лабораторних робіт,
практичних занять і самостійної роботи студентів
з дисципліни**

**«Математичне моделювання та оптимізація
процесів в рухомих з'єднаннях машин»
для студентів спеціальності 133 –
«Галузеве машинобудування»
для всіх форм навчання**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт, практичних
занять і самостійної роботи студентів з дисципліни
«Математичне моделювання та оптимізація
процесів в рухомих з'єднаннях машин»
для студентів спеціальності 133 –
«Галузеве машинобудування»
для всіх форм навчання

Вінниця
ВНТУ
2018

Рекомендовано до видання Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 7 від 29.03.2017 р.)

Рецензенти:

І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор, ВНТУ

Л. К. Поліщук, кандидат технічних наук, доцент, ВНТУ

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, практичних занять і самостійної роботи студентів з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» для студентів спеціальності 133 – «Галузеве машинобудування» для всіх форм навчання / Уклад. Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 81 с.

У методичних вказівках наведено теоретичні відомості, вказівки, контрольні питання та літературні джерела до виконання лабораторних робіт і викладено основні методичні рекомендації для планування і організації самостійної роботи студентів (СРС) з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин», наведена інформація про форми та контроль СРС і тестові контрольні завдання для самостійної перевірки студентами набутих знань. В розділі методичних вказівок до практичних занять наведено мету цих занять, інформацію про форми їх організації та тематику, а також приклади розв'язання та оформлення задач за змістом дисципліни і умови задач для самостійної роботи.

Зміст методичних вказівок відповідає навчальній і робочій програмам дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» для студентів спеціальності 133 – «Галузеве машинобудування».

Навчальне самостійне електронне мережне видання

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт,
практичних занять і самостійної роботи студентів з дисципліни
«Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях
машин» для студентів спеціальності 133 – «Галузеве машинобудування»
для всіх форм навчання

Укладачі:

Обертюх Роман Романович

Слабкий Андрій Валентинович

Оригінал-макет підготовлено Р. Обертюхом

Електронний ресурс PDF.

Підписано до видання 25.07.2018 р. Зам. № P2018-020

Видавець та виготовлювач - Вінницький національний технічний університет,
Інформаційний редакційно-видавничий центр. ВНТУ, ГНК, к.114,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021,
тел. (0432) 65-18-06.

press.vntu.edu.ua;

Email: irvc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

© Р. Обертюх, А. Слабкий 2018

ВСТУП

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, практичних занять і самостійної роботи студентів – магістрантів з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» для студентів спеціальності 133 – «Галузеве машинобудування» призначені для допомоги студентам під час вивчення теоретичної частини дисципліни, підготовки до практичних і лабораторних занять, поточних і модульних (лекторських) контрольних робіт та іспиту.

Методичні вказівки складаються з розділів: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт, самостійної роботи студентів (СРС) і методичні вказівки до практичних занять.

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1.1 Мета лабораторного практикуму з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» – привити практичні навички студентам – магістрантам для: складання динамічних і математичних моделей механічних систем та їх аналізу; виконання експериментальних досліджень натурних дослідних зразків механічних систем, пристроїв і їх деталей, а також проведення комп'ютерних експериментів з названими предметами досліджень.

Важливою складовою в підготовці магістрантів з спеціальності 133 – «Галузеве машинобудування» є набуття ними теоретичних знань і практичних навичок застосування під час розроблення конструкцій машин, механізмів тощо та технологічних процесів математичних методів оптимізації параметрів конструкцій і процесів.

Згідно з вищевказаним і, зважаючи на обмежений обсяг годин навчального навантаження, виділеного в програмі дисципліни на лабораторні заняття, в методичних вказівках розміщено три лабораторні роботи, зміст яких відповідає заявленій меті.

1.2 *Лабораторна робота № 1.* Складання за натурним зразком динамічної та спрощеної математичної моделей гідроімпульсного пристрою для віброточіння

Мета роботи. За натурним зразком або гідрокінематичною схемою гідроімпульсного пристрою для віброточіння освоїти методику складання його динамічної моделі та побудови спрощеної математичної моделі на основі представлення гідравлічної ланки пристрою у вигляді тіла Кельвіна – Фойхта.

1.2.1 Короткі теоретичні відомості

Моделювання в загальному сенсі цього поняття – це процес адекватного відображення найбільш суттєвих сторін досліджуваного об'єкта або явища з точністю, яка необхідна для практичних потреб людини. Теоретичною базою моделювання є *теорія подібності* [1].

Іншими словами, *моделювання* – це процес зображення об'єкта досліджень *адекватною (подібною) йому моделлю* та проведення експериментів з моделлю для отримання інформації про об'єкт досліджень. В процесі моделювання модель є і засобом, і об'єктом досліджень, який знаходиться у відносинах подібності з об'єктом, що моделюється.

Коротко: *модель* – це фізична чи абстрактна система, що є зображенням об'єкта досліджень. Розрізняють фізичні моделі та абстрактні моделі.

Фізичні моделі в загальному вигляді утворюються із сукупності матеріальних об'єктів. Будуються фізичні моделі шляхом використання різних фізичних властивостей об'єктів досліджень, причому природа матеріальних елементів, що застосовуються в моделі, не обов'язково та ж, що й в досліджуваному об'єкті. Прикладом фізичної моделі в широкому розумінні цього поняття є макет (діючий чи не діючий) якоїсь реальної системи, механічної та таке ін.

Ідеалізовану фізичну модель механічної системи (машини, механізму, приводу машини, пристрою тощо) можна зобразити як систему мас її ланок (або моментів інерції мас), зазвичай, зосереджених, які взаємодіють між собою через пружні та дисипативні ланки чи в'язі під впливом зовнішніх сил, як постійних, так і змінних, причому ці сили можуть змінюватись за певними законами.

Пружні та дисипативні ланки чи в'язі цієї системи спричиняють виникнення сил опору рухові мас (моментів інерції мас) цієї системи, який в різні проміжки часу роботи механічної системи може бути неусталеним і усталеним.

Таку ідеалізовану фізичну модель механічної системи прийнято називати її *динамічною моделлю* [2].

Поняття механічної системи – відносне поняття, яке залежить від ступеня детальності розгляду системи як цілого. Наприклад, металорізальний верстат як механічна система в цілому може складатись з таких основних ланок: джерело механічної енергії – електродвигун; привод головного руху; шпіндельний вузол; привод механізму подач (різця, фрези тощо); система керування; система змащування; подачі ЗОР тощо. Кожна з цих ланок за більш деталізованого розгляду сама є механічною системою, яка може складатись також з механічних систем нижчого порядку. Ці частини великої механічної системи є її функціональними частинами, які також можна зобразити ідеалізованими фізичними моделями – *динамічними моделями*.

Щоб скласти динамічну модель механічної системи потрібно мати її структурну схему, та, наприклад, кінематичну, гідравлічну, пневматичну

принципові схеми чи їх комбінації, в яких виділені вхідні ланки, зв'язані з двигуном – джерелом механічної енергії (руху) та виконавчі ланки (робочі), до яких прикладені сили корисного опору.

Як вже відмічалось, динамічна модель – це ідеалізована фізична модель. Вид динамічної моделі залежить від способу ідеалізації реальної системи. Найбільш простий спосіб ідеалізації – це перехід від реальних ланок системи (механізмів, деталей, тощо) до *жорстких* ланок.

Цей перехід ґрунтується на таких припущеннях:

- всі ланки системи є абсолютно твердими тілами;
- гнучкі ланки (паси, ланцюги, троси тощо) вважаються такими, що не розтягуються;
- текучі (рідкі) ланки, наприклад в гідроприводах, пневмоприводах, гідро- та пневмопередачах є нестисливими;
- кінематичні пари ідеально реалізують ті рівняння зв'язків, якими вони описуються, а саме – в шарнірах і поступальних парах відсутні зазори та деформації поверхонь дотику, поверхні вищих кінематичних пар, які дотикаються між собою, точно виготовлені та не деформуються під час передачі зусиль і т. ін.

Динамічна модель механічної системи, складена із жорстких ланок, називається динамічною моделлю машини (системи) із жорсткими ланками. В такій моделі координати всіх матеріальних точок є функції однієї змінної – узагальненої координати q [2]:

$$x_i = f(q); (i = 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

де x_i – декартові координати окремих ланок моделі, які розглядаються як абсолютно тверді тіла.

Пружна та дисипативні ланки реальної механічної системи часто мають малі маси (моменти інерції мас) порівняно з рухомими ланками. В таких випадках ці ланки вважаються *пружнодисипативними безінерційними елементами, тобто безмасовими*.

Якщо кожне з абсолютно твердих тіл такої системи через накладені в'язі має один ступінь вільності, то динамічна модель такої механічної системи з пружними ланками називається *одновимірною* [2]. Приклади такого типу моделей зображені на рисунку 1.1, а,б,в.

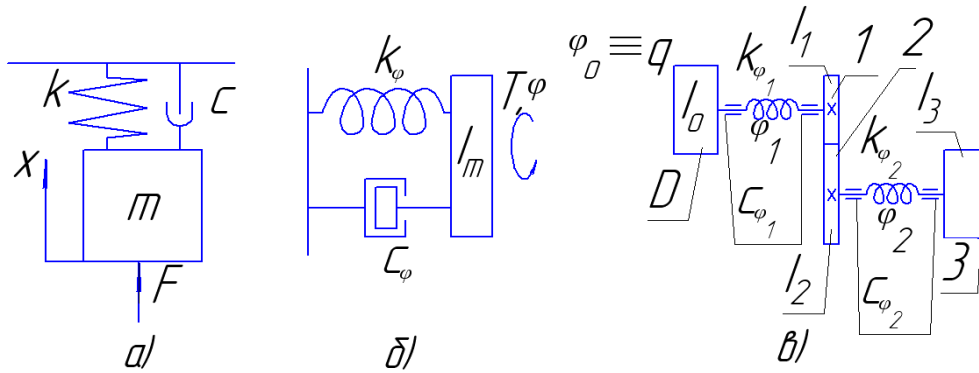


Рисунок 1.1 – Одновимірні динамічні моделі

На рисунку 1, а, б відмічено: m – маса жорсткої ланки системи; k, c – відповідно, жорсткість пружного елемента та коефіцієнт дисипативного опору, наприклад, в'язкого тертя; F – рушійна сила; $x \equiv q$ – узагальнена координата переміщення маси m ; I_m – момент інерції маси диска; k_φ – крутильна жорсткість пружного елемента; c_φ – крутильний коефіцієнт дисипативного опору; T – рушійний обертальний момент; $\varphi \equiv q$ – кут повороту диска – узагальнена координата обертального руху диска.

Динамічна модель, що зображена на рис. 1.1, в складається з чотирьох жорстких ланок – ротора двигуна O , пари зубчастих коліс 1 і 2 і виконавчої ланки 3.

Вали цієї системи вважаються безінерційними пружними елементами з коефіцієнтами жорсткості, відповідно, k_{φ_1} та k_{φ_2} , а підшипники – безінерційні дисипативні елементи, що характеризуються коефіцієнтами опору c_{φ_1} та c_{φ_2} . Ця модель має три ступеня вільності – кут $q \equiv \varphi_0$ повороту ротора двигуна та кути φ_1 і φ_2 закручування валів. Якщо зубчасті колеса (вищі кінематичні пари) складаються з елементів, що не деформуються, то $\varphi_1 = f_1(q)$ і $\varphi_2 = f_2(q)$, а це означає, що динамічна модель, зображена на рис. 1.1, в є також *одновимірною*.

Якщо ж будь яка із ланок динамічної моделі (жорстких) має більше одного ступеня вільності, то така динамічна модель називається *багатовимірною*. Наприклад, якщо в динамічній моделі, зображеній на рис. 1.1, в, врахувати податливість підшипників чи зубчастих вінців коліс, то така модель стане *багатовимірною* [2].

В динамічних моделях, зображених на рисунках 1.1, в і 1.2 всі жорсткі ланки з'єднані послідовно пружними та дисипативними елементами. Такі моделі пружних машин називаються ланцюговими. Модель, що зображена на рис. 1.2, є одновимірною з двома ступенями вільності. Ланцюгові динамічні моделі можуть бути *розгалужені* та *замкнені* [2] (рисунок 1.3, а, б).

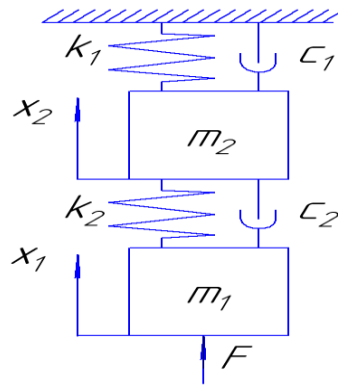


Рисунок 1.2 – Ланцюгова одновимірна динамічна модель

Динамічна модель (див. рис. 1.3, б) – це замкнена система з попереднім натягом зубчастих коліс і призначена для приведення в рух виконавчої ланки 1. Такого типу механізми застосовуються в пристроях для вибирання зазорів, наприклад в механізмах подачі верстатів. У вигляді розгалуженої схеми

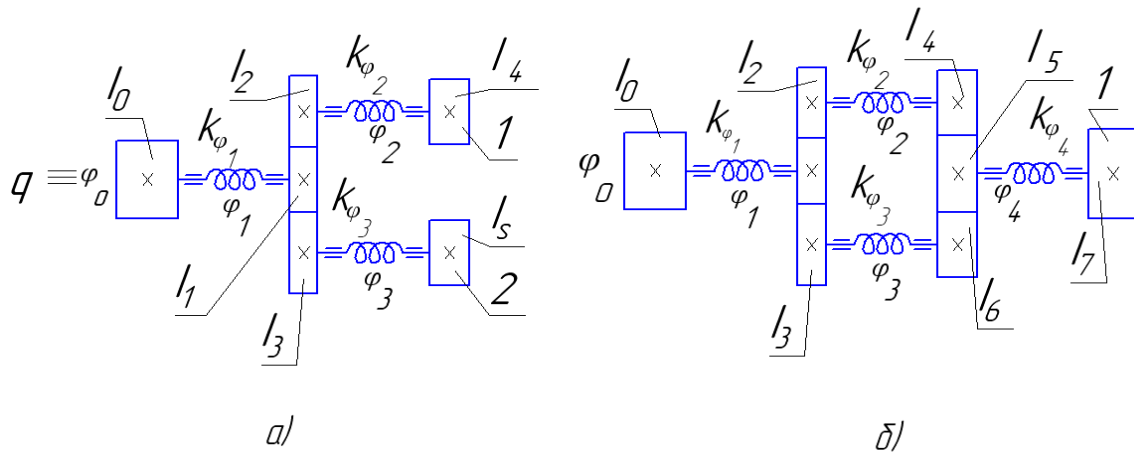


Рисунок 1.3 – Розгалужені одновимірні ланцюгові моделі

можна зображувати не тільки динамічні моделі механізмів обертального руху, а й з іншими видом переміщення ланок, наприклад, двокаскадного генератора імпульсів тиску (ГІТ) гідроімпульсного привода, гідравлічна якого ланка зображена як безінерційне тіло Кельвіна – Фойхта [3] (рисунок 1.4). На рис. 1.4 позначено: m_1 та m_2 – маси клапанів першого і другого каскадів ГІТ; k_1, k_2, c_1, c_2 – відповідно, коефіцієнти жорсткості пружин, що навантажують клапани, і коефіцієнти дисипативного опору переміщенню цих клапанів; k_0 і c_0 – відповідно жорсткість і коефіцієнт дисипативного опору деформації гідравлічної безінерційної ланки (тіло Кельвіна – Фойхта); \dot{x}_{or} – швидкість деформації гідравлічної ланки; u_{01}, u_{02} – відповідно передаточні відношення від гідравлічної ланки до мас m_1 і m_2 .

Динамічні моделі механічних систем, що складаються з абсолютно твердих тіл, називаються *дискретними* [2, 4]. У багатовимірних системах пружні елементи, що з'єднують тверді тіла, знаходяться в складних напружених станах.

В інженерній практиці та під час наукових досліджень бувають випадки, коли зображення механічної системи у вигляді динамічної моделі, що складаються з абсолютно твердих тіл, є неадекватним реальному об'єкту. В таких системах пружно-дисипативні елементи вже не можна вважати безінерційними (безмасовими).

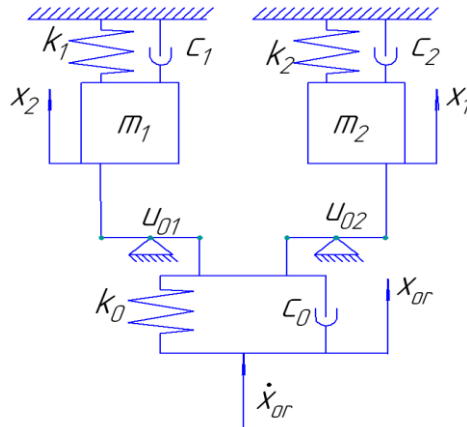


Рисунок 1.4 – Розгалужена одновимірна ланцюгова модель гідроімпульсного привода, гідравлічна ланка зображена як безінерційне тіло Кельвіна – Фойхта

В таких випадках будують динамічну модель системи, де пружно дисипативні елементи наділені масами, а в жорстких ланках враховується їх здатність деформуватись і така модель називається *динамічною моделлю із розподіленими параметрами* [2].

Виявити причину – наслідкові зв'язки в досліджуваному об'єкті, в першу чергу найбільш суттєві, можна за допомогою відповідної *концептуальної моделі, різновидом якої є математична модель об'єкта, складена на основі його динамічної моделі*.

Математична модель – абстрактна модель, наприклад, механічної системи, зображена у вигляді функціональних математичних залежностей між ланками і параметрами динамічної моделі. Ці залежності конкретизують причину – наслідкові зв'язки, виявлені в динамічній чи концептуальній моделі, та кількісно їх характеризують.

Таким чином, математична модель – це спеціальний об'єкт, який певним чином замінює оригінал реальної механічної системи.

Не може бути в принципі математичної моделі, яка б була повним еквівалентом оригінала механічної системи. Будь-яка модель, динамічна чи математична, відображує тільки окремі сторони оригінала. В цьому й полягає складність процесу моделювання, оскільки виникає проблема вибору таких причинно – наслідкових зв'язків в об'єкті досліджень, які б дозволили би отримати найбільше достовірних знань про об'єкт і його поведінку за різних факторів зовнішнього впливу на нього.

Побудова математичної моделі системи відноситься до числа системних задач, розв'язок яких синтезують на базі великого числа вихідних да-

них. За таких умов розв'язку системний підхід дозволяє не тільки побудувати математичну модель системи реального об'єкта, але й на базі цієї моделі вибрати необхідну кількість керівної інформації в реальній системі, оцінити показники її функціонування і через це шляхом моделювання знайти найбільш ефективний варіант побудови та оптимальний режим роботи самої реальної системи.

Методика моделювання реальної системи безпосередньо залежить від рівня моделювання, тобто від ступеня *деталізації опису об'єкта моделювання*.

Таким чином, якоюсь мірою завершене, формулювання поняття математичної моделі таке.

Математична модель системи, в т. ч. і механічної, – це сукупність математичних співвідношень (формул, нерівностей, рівнянь, логічних співвідношень), що визначають характеристики станів системи в залежності від її параметрів, умов однозначності (геометричних, фізичних, початкових і межових), вихідних сигналів, включаючи й випадкові, та часу [4].

Характеристики стану системи в математичних моделях можуть визначатись у вигляді:

1) явних функцій від параметрів системи, вхідних сигналів, початкових умов, інших умов однозначності та часу;

2) системи рівнянь відносно характеристичних станів системи та вихідних сигналів, причому параметри системи входять в коефіцієнти рівнянь, а вхідні сигнали – в праві частини цих рівнянь.

В залежності від специфіки зв'язків характеристик стану системи з її параметрами, вхідними сигналами тощо, розрізняють:

– детерміновані математичні моделі системи, в яких в заданий момент часу характеристики стану однозначно визначаються через вказані величини;

– ймовірнісні (стохастичні) математичні моделі системи, в яких за допомогою математичних співвідношень можна визначити лише розподілення характеристик стану системи за заданими ймовірнісними характеристиками (розподіленнями) її параметрів, вхідних сигналів, початкових умов тощо.

За ознакою подальшого використання математичні моделі можуть бути *аналітичними та імітаційними* [4].

Аналітичні моделі забезпечують достатньо високий ступінь деталізації системи, але не завжди дозволяють отримати висновки загального характеру про функціонування системи.

В імітаційній математичній моделі можуть враховуватись такі особливості складних систем, як наявність в одній і тій же системі елементів неперервної та дискретної дії, нелінійні співвідношення будь-якого характеру, що описують зв'язки між елементами, вплив багаточисельних випадкових факторів складної фізичної природи тощо.

Загальний процес (алгоритм) побудови математичної моделі системи чи явища можна зобразити у вигляді такої схеми (рисунок 1.5).

Щоб правильно описати процеси, що відбуваються в об'єкті, що досліджується, *математична модель повинна бути адекватною об'єкту (предмету) досліджень*.

Адекватність математичної моделі та об'єкта передбачає відтворення моделлю з необхідною точністю всіх властивостей об'єкта, суттєвих для цілей конкретного дослідження.

Оскільки будь-яка модель має характер проекції об'єкта, то *поняття адекватності не абсолютне, а відносне*. Це означає, що оцінка ступеня схожості (подібності) моделі та оригінала об'єкта досліджень може опиратись тільки на оцінку її відмінності від оригінала. Оцінювання відмінності природно є дуже трудомістким, оскільки неможливо використати об'єкт в дійсній його цілісності для порівняння.

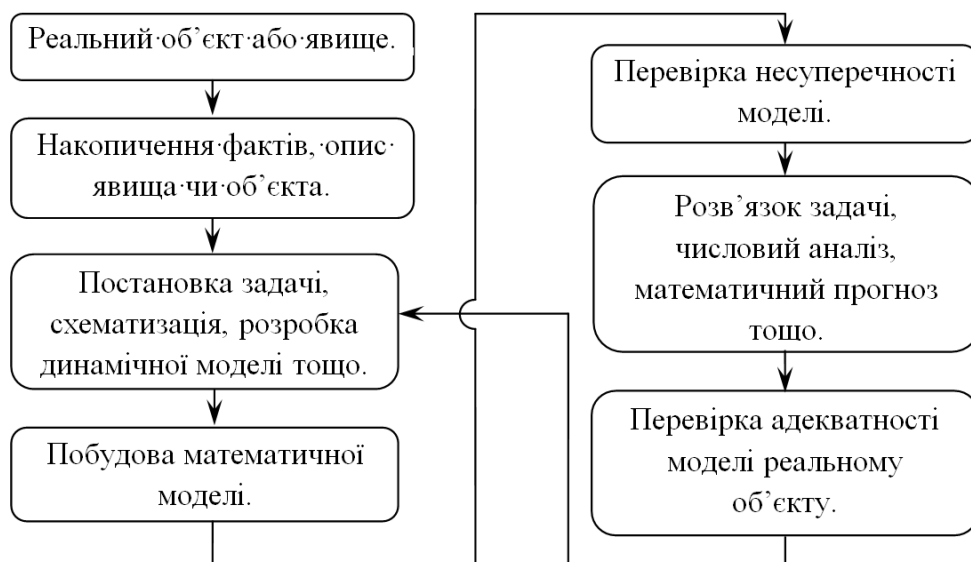


Рисунок 1.5 – Загальний процес (алгоритм) побудови математичної моделі системи чи явища

Математична модель механічної системи, як правило, складається з рівнянь руху, що визначають характер переміщення рухомих ланок системи, рівнянь зв'язку, наприклад, в гідромеханічних системах це рівняння витрат робочої рідини (енергоносія), та умов однозначності, які складаються з початкових, фізичних і геометричних умов та ін.

Як вже відмічалось, на рухомі ланки механічної системи (див. рис. 1.1 – 1.4) діють рушійні (активні) сили та сили опору. Сили F , які приводять в рух жорсткі ланки механічної системи (маси ланок, див. рис. 1.1 – 1.4), називаються *рушійними* або *активними* силами. В загальному випадку ці сили можуть залежати від часу, вихідних параметрів механічної системи та їх похідних за часом. Активні сили за величиною та напрямком можуть бути

постійними і змінними. До постійних сил, наприклад, відносяться сили ваги ланок системи або вага в транспортних машинах вантажів, що переміщуються.

Якщо рушійними ланками механічної системи є, наприклад, пружини, то такі активні сили називаються *позиційними*, величина (модуль) яких залежить від координат рухомих ланок механічної системи. Іншим прикладом такого типу рушійної сили може бути сила, яка приводить в рух поршень, наприклад, двигуна внутрішнього згорання.

В інших випадках активні сили можуть бути тільки функціями швидкості виконавчої ланки механічної системи. Наприклад, обертальний момент на валу електродвигуна залежить тільки від кутової швидкості його ротора.

Рушійним (активним) силам в механічній системі протидіють сили опору, які можуть бути:

- постійними, наприклад, сили ваги та сили сухого тертя;
- позиційними – сили опору, що створюється різного виду пружними елементами;
- силами, які є функціями швидкості ланок механічної системи, наприклад сили в'язкого тертя;
- силами технологічного опору, що виникають під час здійснення виконавчою ланкою робочого процесу, які за своєю фізичною природою можуть бути функціями координат виконавчої ланки, її швидкості, положення та інших її параметрів. Ці функції визначаються видом технологічного процесу, що реалізується під час руху виконавчої ланки механічної системи.

Для складання рівнянь руху ланок механічної системи можна використовувати різні методи, що розглядаються в курсі теоретичної механіки. Найбільш загальними є методи, які ґрунтуються на застосуванні варіаційного принципу Гамільтона або рівнянь Лагранжа II-го роду чи принципу Д'Аламбера.

Рівняння Лагранжа II-го роду записується так [2, 5]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_r} + \frac{\partial E_n}{\partial x_r} - F_r = 0, \quad (1.2)$$

де E_k , E_n , – відповідно, кінетична та потенціальна енергія системи; x_r , $\dot{x}_r = dx_r/dt$ – відповідно, узагальнені координати та швидкості рухомих ланок системи; F_r – узагальнена неконсервативна сила (неконсервативні сили – це сили, робота яких залежить не тільки від початкового та скінченного станів системи, але й від того, яким чином відбувався перехід від одного положення ланок системи до іншого). Це рівняння, зазвичай, використовують для складних механічних систем, коли знаходження виразів для кінетичної та потенціальної енергії, а також узагальненої неконсервативної сили і координати не визиває значних інтелектуальних затрат.

Найчастіше для складання рівнянь руху ланок механічних систем, коли не складно математично описати характер сил, що діють в системі, використовують квазістатичні способи, що ґрунтуються на застосуванні *принципу Д'Аламбера*, який полягає в тому, що розглядають рівновагу динамічної системи з *прикладеними до неї силами інерції*.

В гідроімпульсних установках (приводах і пристроях), з метою отримання високих частот проходження імпульсів тиску, обмежують об'єм W_0 напірної порожнини [3, 6, 7], що робить доцільним для побудови динамічних і математичних моделей таких установок використовувати «пружно-зосереджену модель» енергоносія [8], нехтуючи масою рідини в напірній порожнині. В такій моделі енергоносія гідравлічна ланка, наприклад, привода гідроімпульсного пристрою, представляється тілом Кельвіна – Фойхта [3], у вигляді в'язко-пружної моделі, складеної з паралельно з'єднаних між собою безінерційних пружного k_{or} та дисипативного елементів c_{or} . Ця гідравлічна ланка впродовж робочого циклу деформується з певною швидкістю та взаємодіє з рухомими ланками (масами) пристрою через передаточні відношення $u_{oi} = A_i^2 \cdot A_0^{-2}$, де A_i – площа поперечного перерізу рухомої ланки пристрою; A_0 – площа поперечного перерізу усередненої напірної гідролінії привода пристрою, $A_0 = \sum_{k=1}^n (l_k \cdot A_k) / \sum_{k=1}^n l_k$ (тут l_k , A_k – відповідно, довжина та площа перерізу k – го гідроканалу).

Жорсткість безінерційного пружного елемента відносно площі A_0 визначається за відомою залежністю $k_{or} = A_0^2 \kappa W_0^{-1}$ (κ – модуль пружності енергоносія) [3, 6]. Цю жорсткість, як показано в роботах [3, 7], можна приводити до будь-якої площі поперечного перерізу гідроімпульсного привода за формулою $k_{oi} = u_{oi} k_{or}$, де $i=1, 2, \dots, n$ – порядковий номер ланки елементів привода.

Згідно із запропонованою в роботах [3, 7, 8] моделлю енергоносія, силу F_{A_0} в'язкого опору безінерційного дисипативного елемента c_{or} можна розраховувати за формулою $F_{A_0} = c_o \cdot \dot{x}_{or}$, де $\dot{x}_{or} = dx_{or}/dt$ – швидкість деформації x_{or} гідравлічної ланки (тіла Кельвіна – Фойхта); $c_o = \pi \mu d_o^2 / 4 \approx 0,785 \mu d_o^2$ – коефіцієнт в'язкого опору деформування гідравлічної ланки (тут μ – динамічна в'язкість енергоносія; $d_o = 2\sqrt{(A_0 / \pi)}$). У випадку зведення дисипативного елемента гідравлічної ланки до відповідних площ рухомих елементів гідроімпульсного привода, дисипативну силу опору можна також приводити до цих площ за формулою $F_{A_i} = u_{oi}^{0,25} \cdot c_o (\dot{x}_{A_i} \pm \dot{y}_i)$ [13], де $x_{A_i} = x_{or} \cdot u_{oi}^{-0,5}$ – деформація гідравлічної ланки, зведена до площі поперечного перерізу A_i . \dot{y}_i – швидкість руху

i -ї ланки привода. Тиск p_r енергоносія в напірній усередненій гідролінії A_o зв'язаний з деформацією гідравлічної ланки x_{or} простою залежністю $p_r = x_{or} \cdot k_{or} \cdot A_o^{-1}$ [3].

В роботах [3, 6, 7] показано, що тиском енергоносія та жорсткістю гідравлічної ланки зливної порожнини гідроімпульсних приводів можна знехтувати.

В гідроімпульсних установках однією із основних ланок привода є параметричний генератор імпульсів тиску (ГІТ) енергоносія, який генерує в робочих порожнинах гідродвигуна (гідроциліндра) імпульси тиску енергоносія, амплітуда яких визначається тисками «відкриття» p_1 та «закриття» p_2 ГІТ. Зв'язок між рівнями тиску p_1 та p_2 і деформаціями «відкриття» $x_{0\max}$ та «закриття» x_{0k} гідравлічної ланки ГІТ визначається залежностями:

$$x_{0\max} = p_1 A_o \cdot k_{or}^{-1}; \quad (1.3)$$

$$x_{0k} = p_2 A_o \cdot k_{or}^{-1} = x_{0\max} \cdot A_1 \cdot A_2^{-1} = x_{0\max} u_{21}^{0.5}, \quad (1.4)$$

де $u_{21} = A_1^2 \cdot A_2^{-2}$ – внутрішнє передаточне відношення в ГІТ між площами робочих перерізів його першого A_1 та другого A_2 ступенів.

1.2.3 Натурний зразок пристрою або його гідрокінематична схема, необхідні для виконання роботи

Конструктивна схема натурального зразка гідроімпульсного [6] пристрою для радіального віброточіння (зразок видає викладач, що проводить лабораторне заняття) показана на рисунку 1.6.

Пристрій складається з корпусу 1, в правій частині (за рисунком) центральної ступінчастої осьової розточки якого встановлено поршень – прорізну пружину (ППП) 2, попередня деформація якої регулюється трубчастим гвинтом 14, вкрученим в кришку 7, яка кріпиться до корпусу 1 шпильками (умовно не показані). В поршневій частині ступінчастої центральної осьової розточки ППП 2 з боку його прорізної пружини розміщено запірний елемент – кульку 3 ГІТ пристрою. Кулька 3 у початковому стані контактує з кромками отвору діаметром d_1 (клапанна герметизація першого ступеня ГІТ), а по діаметру d_2 (діаметр кульки 3) спряжена за ходовою точною посадкою (точність 6 – 7 квалітету) з поверхнею розточки в поршневій частині ППП 2 таким чином, що лінія торкання кульки 3 з поверхнею розточки розташована на відстані h_o (додатне перекриття золотникової герметизації другого ступеня ГІТ) від краю розточки діаметром d_2 .

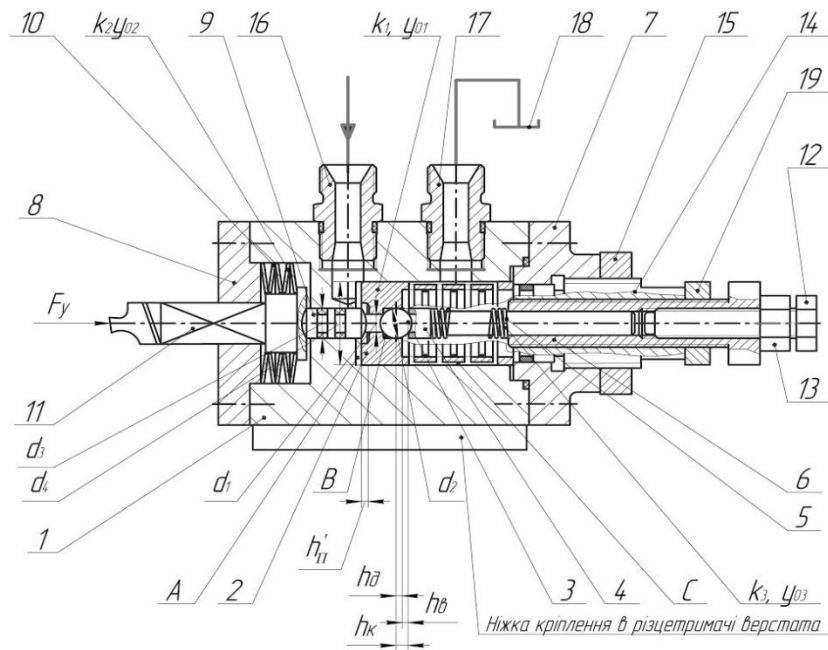


Рисунок 1.6 – Конструктивна схема гідроімпульсного пристрою для віброточіння

Кульку 3 навантажено витою циліндричною пружиною 5 регулятора тиску «відкриття» p_1 ГПТ, який складається з опори 4, через яку на кульку 3 передається зусилля пружини 5, трубчастого гвинта 6, за допомогою якого змінюється попередня деформація пружини 5, та гвинта 12 для регулювання величини від'ємного перекриття h_e кульки 3 під час відкриття ГПТ. Трубчасті гвинти 6 та 14 і гвинт 12 контрять, відповідно, гайками 19, 15 та 13.

Поршнева частина ППП 2 з боку напірної порожнини A пристрою взаємодіє із сферичним торцем штовхача 9, який іншим своїм сферичним торцем контактує зі сферичною поверхнею, утвореної на торці ступінчастої циліндричної частини державки відрізного різця 11. Різець 11 навантажено пакетом тарілчастих пружин 10, розташованого на ступінчастій циліндричній частині його державки. Направлення різця 11 здійснюється прямокутною (або квадратною) в поперечному перерізі частиною його державки, яка спрягається за ходовою посадкою (точність не нижче 7 – 8 квалітету) з поверхнею отвору такої ж форми поперечного перерізу, виконаного в кришці 8. Кришка 8 кріпиться до корпусу 1 шпильками (умовно не показані).

Енергоносій підводиться до пристрою через штуцер 16, сполучений напірною порожниною A , і зливається через штуцер 17, з'єднаний зі зливною порожниною C та гідробаком 18 насосної гідростанції (на рис. 1.6 умовно не показана), яка є джерелом енергоносія.

Герметизацію штовхача 9 та трубчастого гвинта 14 виконано гумовими кільцями круглого перерізу (на рис. 1.6 умовно не позначені позиціями),

які працюють в режимі рухомого з'єднання. Штуцери 16 та 17 і кришка 7 також ущільнюються гумовими кільцями круглого перерізу (на рис.2.1 умовно не позначені позиціями), які встановлені в закритих канавках (нерухомі з'єднання).

Гідроімпульсний пристрій для радіального віброточіння в різцетримачі верстата кріпиться за допомогою спеціальної ніжки (див. рис. 1.6), жорстко встановленої в поздовжньому пазу корпусу 1.

З насосною гідростанцією гідроімпульсний пристрій з'єднується через штуцери 16 та 17 стандартними гнучкими рукавами високого тиску. Як джерело енергоносія можна застосовувати стандартні насосні гідростанції, а у гідрофікованих верстатах для живлення пристрою, за незначних конструктивних змін, можуть використовуватись гідросистеми верстатів.

Робочий цикл гідроімпульсного пристрою для радіального віброточіння починається зі зростання тиску енергоносія в його напірній порожнині A до рівня p_1 , за час якого різець 11 притискається зусиллям, що виникає від дії тиску на площу $A_3 = \pi d_3^2 / 4$ (тут d_3 – діаметр штовхача 9) поперечного перерізу штовхача 9, до оброблюваної деталі і відбувається процес різання. Цей же тиск енергоносія, діючи на площу $A_4 = \pi d_4^2 / 4$ (тут d_4 – діаметр поршневої частини ППП 2) поперечного перерізу поршневої частини ППП 2, спричиняє зусилля, що переміщує ППП 2 та деформує прорізну пружину ППП 2 і пружину 5, запасаючи таким чином відповідну потенціальну енергію. За досягнення в гідросистемі привода пристрою рівня тиску енергоносія $p_1 = k_3 \cdot y_{03} / A_1$ (тут k_3, y_{03} , – відповідно, жорсткість та попередня деформація пружини 5; $A_1 = \pi d_1^2 / 4$) кулька 3 відривається від сідла, яким є контакт з кромками отвору діаметром d_1 , і переміщується на хід $h_k = h_d + h_6$, внаслідок чого напірна A та зливна C порожнини з'єднуються. Описаний процес називається відкриттям ГТТ. Запірний елемент – кулька 3 ГТТ утримується у відкритому положенні до тих пір, поки в гідросистемі привода пристрою тиск енергоносія не знизиться до рівня $p_2 = k_3 \cdot (y_{03} + h_k) / A_2$ – тиску «закриття» ГТТ (де $A_2 = \pi d_2^2 / 4$). Внаслідок такого зниження рівня тиску в гідросистемі привода пристрою під дією пакету тарілчастих пружин 10 різець 11 відходить від оброблюваної деталі, що спричиняє переривання процесу різання. Під дією зусилля стисненої прорізної пружини ППП 2 здійснює зворотний хід, в кінці якого відбувається ударна взаємодія ППП 2 через штовхач 9 з різцем 11, який різко вступає в контакт з оброблюваною деталлю, що спричиняє подрібнення стружки за рахунок переходу частини потенціальної енергії, накопиченої прорізною пружиною ППП 2, в енергію деформаційного зламу стружки. За час зворотного ходу ППП 2 кулька 3 повертається в початкове положення (ГТТ закривається) і робочий цикл пристрою повторюється.

1.2.4 Порядок виконання лабораторної роботи

1.2.4.1 Отримавши натурний зразок чи конструктивну схему (див. рис. 1.6) гідроімпульсного пристрою для радіального віброточіння, визначити з яких деталей складаються його рухомі ланки та об'єднати їх в рухомі маси ППП 2, системи різець 11 – пакет тарілчастих пружин 10 – штовхач 9 (РПТПШ) і ГІТ.

1.2.4.2 Визначити пружні та дисипативні ланки чи в'язі пристрою та характер їх зв'язку з його рухомими масами ППП 2, РПТПШ і ГІТ, а також виконати поетапний (по фазний) аналіз робочого циклу пристрою, визначивши етапи (фази), які відносяться до *прямого* та *зворотного ходів* рухомих ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ.

1.2.4.3 Гідравлічну ланку гідроімпульсного привода пристрою представити у вигляді тіла Кельвіна – Фойхта, а за силу технологічного опору прийняти складову сили різання F_z .

1.2.4.4 Присвоїти порядкові індекси рухомих масам m_i ППП 2, РПТПШ і ГІТ, коефіцієнтам жорсткості k_0 та дисипативного c_0 опору гідравлічної ланки гідроімпульсного привода пристрою, його коефіцієнтам пружних k_i і дисипативних c_i ланок і передаточним відношенням u_{0i} від гідравлічної ланки до мас m_i (тут i – порядковий номер ланки або системи ланок пристрою).

1.2.4.5 За аналогією з динамічною моделлю, показаною на рис. 1.4, побудувати динамічну модель для *прямого ходу* [6] мас ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ, додатково навантаживши сумарну масу системи РПТПШ силами сухого тертя R та технологічного опору F_z .

1.2.4.6 Звівши [6], шляхом врахування значень відповідних передаточних відношень u_{0i} , до відповідних площ поперечного перерізу ППП 2, РПТПШ і ГІТ коефіцієнти жорсткості k_0 , дисипативного c_0 опору та швидкості \dot{x}_{or} деформації гідравлічної ланки гідроімпульсного привода пристрою, спростити його початкову динамічну модель для *прямого ходу*, розділивши її на дві (або більше) простих моделей.

1.2.4.7 Приймаючи систему припущень, наведену в роботах [3, 6], скласти, використавши *принцип Д'Аламбера*, математичну модель *прямого ходу* мас ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ. Рушійні (активні) сили, що приводять в рух маси m_i , які зображені на спрощених динамічних моделях, сили пружного та в'язкого опору переміщенню мас m_i і силу в'язкого опору деформації гідравлічної ланки записати у вигляді формул:

$$F_{pi} = u_{0i} \cdot k_{0i} (x_{Ai} - y_i) - \text{рушійна сила}; \quad (1.5)$$

$$F_{npi} = k_i (y_i \pm y_{0i}) - \text{сила пружного опору} \quad (1.6)$$

переміщенню маси m_i ;

$$F_{ci} = C_i \dot{y}_i - \text{сила в'язкого опору} \quad (1.7)$$

переміщенню маси m_i ;

$$F_{Ai} = u_{0i}^{0,25} \cdot c_0 (\dot{x}_{Ai} - \dot{y}_i) - \text{сила в'язкого опору} \quad (1.8)$$

деформації гідравлічної ланки,

де u_{0i} – передаточне відношення від гідравлічної ланки, визначеної відносно площі A_0 поперечного перерізу усередненої напірної гідролінії привода пристрою, до площі A_i поперечного перерізу i -ї рухомої ланки пристрою; k_{0i} – жорсткість гідравлічної ланки, зведена до площі поперечного перерізу i -ї рухомої ланки пристрою; x_{Ai} – поточна деформація гідравлічної ланки, зведена до площі A_i поперечного перерізу i -ї рухомої ланки пристрою; y_i – поточна координата положення i -ї рухомої ланки пристрою під час її переміщення; y_{0i} – попередня деформація пружного елемента силової ланки чи ГІТ пристрою (пакета тарілчастих пружин 10, прорізної пружини ППП 2, пружини 5, див. рис. 1.6); \dot{y}_i – поточна швидкість i -ї рухомої ланки пристрою. У формулі (1.6) знак «плюс» ставлять тоді, коли переміщення y_{0i} ланки пристрою збільшує деформацію пружного елемента, а «мінус» – коли зменшує.

1.2.4.8 Змінення деформації x_{0r} гідравлічної ланки в процесі прямого ходу мас ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ визначити за методикою, наведеною в роботах [3, 6], скориставшись залежністю (рівняння зв'язку – рівняння витрати енергоносія)

$$x_{0r} = x_{0\max} - Q_{\Sigma l} \cdot t \cdot A_0^{-1}, \quad (1.9)$$

де $Q_{\Sigma l}$ – сумарна витрата енергоносія через гідроканали пристрою та відкрити щілину запірного елемента ГІТ, яка відповідає певним переміщенням ППП 2 шляху прямого ходу (індекс $l = 1 \dots n$ число фаз (періодів) [6] прямого ходу ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ); t – відповідно, поточний час зміни x_{0r} для певного « l » зміни $Q_{\Sigma l}$, який можна розділити на умовні інтервали $[0, t_n]$, $[t_{n1}, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... $[t_{l-1}, t_{l+1}]$; $t_n = t_{n0} = x_{0\max} \cdot A_0 \cdot Q_n^{-1}$; $t_{n1} = x_{0\max} (1 - u_{21}^{0,5}) A_0 \cdot Q_n^{-1}$ – відповідно, час зростання деформації гідравлічної від $x_{0r} = 0$ до $x_{0r} = x_{0\max}$ для першого та наступного робочого циклу привода пристрою (визначається за орієнтовною циклограмою робочого циклу привода пристрою [6], побудова якої виходить за межі даної лабораторної роботи); Q_n – подача гідронасоса привода пристрою.

Сумарні витрати $Q_{\Sigma l}$ енергоносія на інтервалах $[0, t_n], \dots, [t_{l-1}, t_{l+1}]$ визначають за відомими правилами для гідроімпульсних приводів [3, 6, 7].

Рівнянням (1.9), разом зі зміною $Q_{\Sigma l}$ на вказаних часових інтервалах і обмеженнями за переміщенням рухомих ланок ППП 2, РПТПШ і ГІТ, є умовами однозначності для математичної моделі розглядуваного пристрою

(див. рис. 1.6). В цій лабораторній роботі під час побудови математичної моделі *прямого ходу* мас ланок ППП 2, РПТПШ і ГТТ умовами однозначності вважати рівняння (1.9) та часові інтервали зміни Q_{Σ} .

1.2.4.9 Результати виконання лабораторної роботи оформити як звіт, в якому відобразити:

– в конспективному викладенні короткі теоретичні відомості про особливості моделювання механічних систем, зокрема пристроїв з гідроімпульсним приводом;

– описання (з наведенням рис. 1.6) конструктивної схеми натурального зразка гідроімпульсного пристрою для радіального віброточіння;

– поетапний (по фазний) аналіз робочого циклу гідроімпульсного привода пристрою;

– розроблення динамічної моделі гідроімпульсного привода пристрою з необхідними ілюстраціями та детальною характеристикою пружних і дисипативних ланок та їх взаємодії з об'єктом віброточіння (технологічне F_z);

– математичну модель *прямого ходу* мас ланок ППП 2, РПТПШ і ГТТ гідроімпульсного привода пристрою для радіального віброточіння у вигляді диференціальних рівнянь руху вказаних мас з умовами однозначності, описаними в п. 1.2.4.8;

– звіт з лабораторної роботи оформити згідно з вимогами ДСТУ 3008 : 2015.

1.2.5 Контрольні питання для самоперевірки

1.2.5.1 Що розуміють під поняттям *моделювання*?

1.2.5.2 Яку ідеалізовану фізичну модель механічної системи прийнято називати *динамічною моделлю*?

1.2.5.3 Наведіть означення поняттю – «*Пружнодисипативний безінерційний елемент*».

1.2.5.4 Дайте означення *одновимірної* та *багатовимірної* динамічної моделі механічної системи.

1.2.5.5 Які динамічні моделі механічних систем відносяться до *ланцюгових розгалужених розімкнених і замкнених*?

1.2.5.6 Які динамічні моделі механічних систем називаються *дискретними*?

1.2.5.7 Наведіть *найбільш повне* означення *математичної моделі* реального об'єкта (механічної системи тощо).

1.2.5.8 Що розуміють під поняттями – «*Аналітична*» та «*Імітаційна*» математичні моделі?

1.2.5.9 Наведіть означення адекватності математичної моделі реальному об'єкту, що моделюється.

1.2.5.10 Які сили, що навантажують рухомі ланки механічної системи, відносять до *рушійних (активних)*?

1.2.5.11 Наведіть класифікацію *сил опору*, що протидіють рушійним силам в механічній системі, та дайте їх означення.

1.2.5.12 Які методи використовуються для складання *диференціальних рівнянь руху* ланок механічної системи під час побудови її математичної моделі?

1.2.5.13 Що розуміють під поняттям – «*Неконсервативні сили*»?

1.2.5.14 В чому полягає суть *принципу Д'Аламбера* під час складання *диференціальних рівнянь руху* ланок механічної системи?

1.2.5.15 Наведіть означення поняттю – «*Пружнозосереджена модель енергоносія в гідравлічних (гідроімпульсних) приводах*».

1.2.5.16 За якою залежністю визначають *площу поперечного перерізу усередненої напірної гідролінії гідроімпульсного привода*?

1.2.5.17 За якою формулою можна розрахувати *жорсткість гідравлічної ланки гідроімпульсного привода*?

1.2.5.18 За якою формулою можна визначити силу в'язкого опору *безінерційного дисипативного елемента гідравлічної ланки*, представленій як тіло Кельвіна – Фойхта в гідроімпульсному приводі?

1.2.5.19 За якою залежністю тиск енергоносія в гідросистемі гідроімпульсного привода, гідравлічна ланка якого представлена як тіло Кельвіна – Фойхта, зв'язаний з деформацією гідравлічної ланки?

1.2.5.20 Поясніть будову та принцип роботи гідроімпульсного пристрою для радіального віброточіння.

1.2.5.21 З якими узагальненими формулами можна розрахувати рушійні сили та сили опору рухові ланок гідроімпульсного пристрою для радіального віброточіння – пружного та в'язкого?

1.2.5.22 За якою залежністю можна визначити змінення деформації гідравлічної ланки, представленій як тіло Кельвіна – Фойхта, в процесі руху ланок гідроімпульсного привода?

Література

1. Гухман А. А. : Введение в теорию подобия / А. А. Гухман – М. : Высш. шк., 1973. – 254с.

2. Асташев В. К. Динамика машин и управление машинами: Справочник/ Асташев В. К., Бабицкий В. И., Вульфсон И. И. и др.; под ред. Г. В. Крейна. – М. : Машиностроение, 1988. – 240 с.

3. Іскович-Лотоцький Р. Д. Генератори імпульсів тиску для керування гідроімпульсними приводами вібраційних та віброударних технологічних машин : монографія / Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Архипчук М. Р. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця 2008. – 171 с.

4. Молчанов А. А. Моделирование и проектирование сложных систем / А. А. Молчанов – К. : Выща шк., Головное изд-во, 1988. – 359 с.

5. Добронравов В. В. Курс теоретической механики : учебник для машиностроит. спец. вузов / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – [4-е изд. перераб. и доп.]. – М. : Высш. школа, 1983, – 575 с.

6. Обертюх Р. Р. Пристрої для віброточіння на базі гідроімпульсного привода : монографія / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 164 с.

7. Іскович-Лотоцький Р. Д. Процеси та машини вібраційних та віброударних технологій : Монографія / Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Севостьянов І. В. – Вінниця : 2006. УНІВЕРСУМ – Вінниця – 291 с.

8. Бочаров Ю. А. Основы общей теории гидравлических кузнечно – штамповочных машин // Машины и технология обработки металлов давлением: Сб. науч. Трудов МВТУ №330. – М., 1980. – С. 12–40.

1.3 Лабораторна робота № 2. Дослідження на ЕОМ методом скінченних елементів розподілу напружень і деформацій у прорізній пружині

Мета роботи. Використовуючи підпрограму «APR FEM: прочностной анализ» з програмного пакета КОМПАС-3D V13, методом скінченних елементів встановити характер розподілу напружень і деформацій в натурному зразку прорізної пружини (або за розмірами та маркою пружинної сталі, взятими з робочого кресленника пружини).

1.3.1 Короткі теоретичні відомості про пружини високої жорсткості та розрахунки деталей машин методом скінченних елементів

До пружин високої жорсткості (порівняно, наприклад, з витими циліндричними пружинами) відносять прорізні, тарілчасті та кільцеві пружини (рис. 1.7, а, б, в) [1, 2].

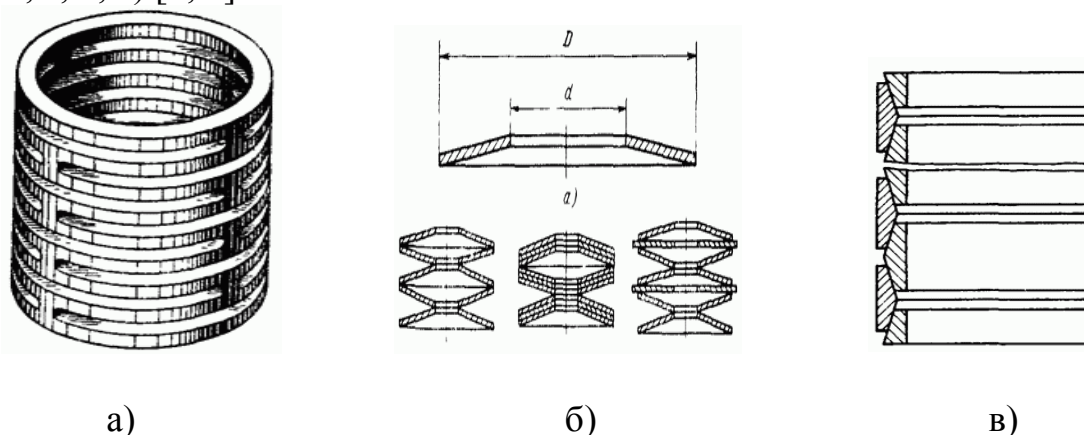


Рисунок 1.7 – Основні види пружин високої жорсткості

Прорізні пружини (див. рис. 1.7, а) виготовляють фрезеруванням (або способом електроіскрового оброблення) наскрізних пазів в циліндричних трубах, зазвичай, з якісної пружинної сталі. В результаті такого оброблен-

ня отримують конструкцію пружини у вигляді плоских кілець, з'єднаних між собою короткими перемичками. Плоскі кільця пружини повернуті одне відносно іншого на центральний кут α , який за числа прорізів z визначається для одного прорізу без врахування ширини перемички як $\alpha = 2\pi/z$ (за $z = 2$ $\alpha = \pi$). Число прорізів в загальному випадку може бути більше двох, наприклад, $z = 3$, але найчастіше прорізи пружини виготовлять з двома прорізами.

Основні геометричні параметри прорізних пружин: D – зовнішній діаметр; a, b – відповідно ширина та товщина кільця; $R = 0,5(D - a)$ – середній радіус пружини.

За конструктивним виконанням прорізи пружини можуть бути нерознімними та рознімними, складеними з плоских кілець і перемичок, що поспідовно чергуються. В нерознімному виконанні прорізи пружини працюють на стиск та розтяг. Навантажують прорізи пружини осьовим зусиллям F , яке спричиняє в поперечному перерізі кільця напруження згину $\sigma_{зг}$ та кручення $\tau_{кр}$, які у найбільш небезпечних перерізах, розташованих в місцях переходу кільця в перемичку, можна розрахувати за відомими з курсу опору матеріалів формулами:

$$\sigma_{зг} = M_{зг} / W_{зг}; \quad (1.10)$$

$$\tau_{кр} = T / W_{кр}, \quad (1.11)$$

де $M_{зг} = 0,5 \cdot (1 - k_2) \cdot \tan(\alpha/4) \cdot F \cdot R / z$ – згинальний момент в небезпечному перерізі кільця [1]; $T = 0,5 \cdot k_2 \cdot F \cdot R / z$ – крутний момент в небезпечному перерізі кільця [1] (тут $k_2 = 1 - \{k_1 \cdot \sin(\alpha/2) \cdot [1 + [\tan(\alpha/4)]^2]\} / \{(k_1 - 1) \tan(\alpha/4) + (k_1 + 1) \cdot [1 + [\tan(\alpha/4)]^2] \cdot (\alpha/4)\}$ – геометричний коефіцієнт [1]; $k_1 = E \cdot J_{зг} / G \cdot J_{кр} = 0,65 \cdot k / (k - 0,63)$ – безрозмірний коефіцієнт співвідношення жорсткостей кільця під час згину та кручення за $E/G = 2(1 + \mu) = 2,6$ (де E, G – відповідно модулі пружності матеріалу прорізної пружини під час згину та кручення; $\mu = 0,3$ – коефіцієнт Пуассона матеріалу пружини); $k = a/b$); $W_{зг} = ab^2/6$, $W_{кр} = (k - 0,63)b^3/3$ – відповідно, моменти опору перерізу кільця під час згину та кручення; $J_{зг} = ab^3/12$, $J_{кр} = (k - 0,63)b^4/3$ – відповідно, моменти інерції перерізу кільця під час згину та кручення.

Жорсткість k_{mn} прорізної пружини можна визначити за наближеною залежністю [1]:

$$k_{mn} = (F - F_0) / h, \quad (1.12)$$

де F_0 – осьове зусилля прорізної пружини за її попередньої (стискання) деформації; h – робочий хід пружини. Якщо $F_0 = 0$, то жорсткість прорізної пружини можна розрахувати за наближеною формулою [1]

$$k_{mn} = z \cdot E \cdot J_{32} / (\kappa \cdot R^3 \cdot n), \quad (1.13)$$

де $\kappa = k_1 \cdot [(\alpha/4) - (1 - k_2) \cdot \tan(\alpha/4)]$ [1]; n – число кілець пружини.

Міцність прорізних пружин перевіряють за формулою (енергетична теорія міцності)

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_{зг}^2 + 3\tau_{кр}^2} \leq [\sigma], \quad (1.14)$$

де $\sigma_{екв}$ – еквівалентне напруження в небезпечному перерізі кільця; $[\sigma]$ – допустиме напруження згину для матеріалу пружини.

За однакових габаритів і площі поперечного перерізу робочих елементів прорізної пружини $A_{mn} = ab$ та гвинтової циліндричної пружини $A_{звц} = \pi d^2/4$ (тут d діаметр дроту (прутка), прорізні пружини мають в 10 раз більшу жорсткість порівняно з гвинтовими циліндричними.

Тарілчасті пружини (пружини Бельвілля, див. рис. 1.7, б) [1 – 3] виготовляють у вигляді кільцевої конічної оболонки (зрізаний конус, що немає дна в основах). Основні геометричні параметри тарілчастих пружин: D – зовнішній діаметр; d – внутрішній діаметр; h_0 – висота пружини; f_3 – висота внутрішнього конуса; s – товщина оболонки; b – ширина опорних площин пружини (в основах конуса), що шліфуються. Гострі кромки пружин заокруглюють радіусом $0,1 s$.

Тарілчасті пружини загального призначення стандартизовані за ГОСТ 3057-79. Їх за витривалістю в умовах циклічного навантаження ділять на два класи: клас 1 – витримують не менше $2 \cdot 10^6$ циклів навантаження; клас 2 – не менше 10^4 циклів. За конструктивним виконанням є два типи тарілчастих пружин – з гострими кромками (тип 1, немає опорних площин шириною b) та з опорними площинами (тип 2). В залежності від межових відхилень (у відсотках, %) по зусиллю чи деформації, тарілчасті пружини за точністю поділяють на три групи: $\pm 5\%$ – група 1; $\pm 10\%$ – група 2; $\pm 20\%$ – група 3.

Виготовляють тарілчасті пружини штамповкою з листової високоякісної пружинної сталі (марки 60С2, 60С2А, 50ХФА, 65С2ВА, 70С3А та ін.). В залежності від товщини листа сталі, процес штамповки листа здійснюється в холодному його стані ($s \leq 6$ мм) або в гарячому ($s > 6$ мм). Щоб підвищити несучу здатність тарілчастих пружин їх заневолюють, навантажуючи максимальним зусиллям F_{max} до повного сплющення та витримкою в цьому стані не менше 12 годин. Тарілчасті пружини можуть бути з антикорозійним покриттям або без нього.

З метою підвищення податливості (ходу) та несучої здатності, тарілчасті пружини застосовують у вигляді пакетів: послідовним встановленням тарілок одна на одну основами конусів (див. лівий бік нижньої частини рис. 1.7, б); послідовним встановленням основами конусів комплектів (пакетів) тарілок один на одного (див. середнє зображення на нижній частині

рис. 1.7, б); встановленням між більшими основами конусів тарілок плоских шайб (див. правий бік нижньої частини рис. 1.7, б). Пакет тарілчастих пружин з плоскими шайбами може ефективно демпфірувати енергію коливань і гасити енергію удару.

Жорсткість k_{mn} однієї тарілчастої пружини можна розрахувати за наближеною залежністю [1, 3]

$$k_{mn} = 4Es^3 \{ (f_3/s)^2 - 3[(f_3\lambda)/s^2] + [3(\lambda/s)^2]/2 + 1 \} / [(1 - \mu^2)\gamma D^2], \quad (1.15)$$

де $\lambda = \lambda_{max} \leq 0,8 f_3$ – максимальний робочий прогин тарілчастої пружини; $\gamma = [1 - (1/k_D)]^2 / (\pi \ln k_D)$; $k_D = D/d$.

Більш детальну інформацію з методики розрахунку тарілчастих пружин і конструювання на їх базі різних механізмів можна знайти в роботах [2, 4].

Кільцеві пружини (див. рис. 1.7, в) застосовують коли необхідно створити або сприймати великі навантаження, а також розсіювати велику кількість енергії, наприклад, в потужних амортизаторах [3, 4].

Конструкція кільцевої пружини складається з набору *кілець двох типів*. Зовнішня поверхня *внутрішнього кільця першого типу* оформлена у вигляді двох зрізаних конусів, а внутрішня поверхня – циліндричний отвір. Отвір *зовнішнього кільця другого типу* виконано у вигляді двобічної конічної поверхні, менші основи конусів якої звернуті одна до одної, а зовнішня поверхня кільця циліндрична. *Опорні внутрішні кільця* пружини оформлені по зовнішній поверхні у вигляді зрізаних конусів з циліндричним отвором, діаметр якого є рівним діаметру отвору *внутрішнього кільця першого типу*.

Під час навантаження кільцевої пружини *кілець першого та другого типів* всовуються одне в одне, причому зовнішні кільця розтягуються, а внутрішні стискаються. Цей процес деформації кільцевої пружини супроводжується взаємним проковзуванням контактуючих поверхонь зовнішніх і внутрішніх кілець, що і є основним фактором розсіювання енергії та нагрівання пружини під час її деформації, особливо за багатоциклового навантаження.

Деформацію (осідання) λ кільцевої пружини під дією осьової сили F можна розрахувати за формулою [4]

$$\lambda = [(n - 1) \cdot F \cdot (D_m^{30B} / A_{30B} + D_m^{BH} / A_{BH})] / [(2\pi \cdot E \cdot \tan \beta \cdot \tan(\beta + \rho)], \quad (1.16)$$

де n – число кілець; D_m^{30B} , D_m^{BH} , A_{30B} , A_{BH} – відповідно, середні діаметри та площі поперечного перерізу зовнішніх і внутрішніх кілець; β – кут конуса конічних поверхонь кілець ($\beta = 14^\circ \dots 17^\circ$ [4]); ρ – кут тертя ($\tan \rho = f$ – коефіцієнт тертя ковзання між кільцями, зазвичай, $f = 0,1 \dots 0,15$ [4]).

Перевірний розрахунок на міцність кільцевих пружин доцільно виконувати для зовнішніх кілець на розтягування, а внутрішніх – на стискання за такими залежностями [4]:

$$\sigma_p^{30B} = F_{max} / [\pi \cdot A_{30B} \cdot \tan(\beta + \rho)] \leq [\sigma_p]; \quad (1.17)$$

$$\sigma_c^{BH} = F_{max} / [\pi \cdot A_{BH} \cdot \tan(\beta + \rho)] \leq [\sigma_c], \quad (1.18)$$

де $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$ – допустимі напруження матеріалу кілець на розтягування та стискання.

Жорсткість k_{kn} кільцевої пружини можна розрахувати за наближеною формулою, отриманою з (1.16) за $F = F_{max}$, $\lambda = \lambda_{max}$ і без попередньої деформації пружини ($F_0 = 0$ та $\lambda_0 = 0$):

$$k_{kn} = [(2\pi \cdot E \cdot \tan \beta \cdot \tan(\beta + \rho))] / [(n - 1) \cdot (D_m^{30B} / A_{30B} + D_m^{BH} / A_{BH})]. \quad (1.19)$$

Кінетичну енергію E_k , яку може поглинати (розсіювати) кільцева пружина за один цикл (навантаження – розвантаження), можна оцінити за простою залежністю [4]

$$E_k = 0,5 \cdot \xi \cdot \lambda \cdot F, \quad (1.20)$$

де $\xi = 0,6 \dots 0,7$ [4] – експериментальний коефіцієнт, що враховує проковзування (тертя) кілець під час роботи пружини.

Процес поглинання (розсіювання) кільцевою пружиною кінетичної енергії E_k можна пояснити тим, що під час поступового розвантаження пружини внутрішні сили пружності певний час урівноважуються силами тертя і криві $F = f(\lambda)$ під час навантаження та розвантаження пружини не співпадають і утворюється петля гістерезису, площа якої й визначає рівень поглинутої енергії.

Метод скінченних елементів (МСЕ) [5, 6] – потужний числовий метод розв’язування задач механіки деформованого твердого тіла, гідромеханіки, теплопровідності, будівельної механіки та ін.

Суть методу полягає в апроксимації суцільного середовища з нескінченним числом ступенів свободи сукупністю простих елементів, які мають скінченне число ступенів свободи, зв’язаних між собою у вузлових точках [5, 6].

Незалежно від формулювання МСЕ, яке визначається типом задач, що розв’язуються, цей метод передбачає такі основні етапи розрахунку:

- розбивання тіла (або його якоїсь області), що розраховується, на скінченні елементи;
- апроксимація залежних змінних кусково-поліномними функціями з невідомими параметрами для кожного скінченного елемента;
- підставлення апроксимуючих функцій у визначальні рівняння та їх розв’язування, під час якого знаходяться значення параметрів, що повніс-

тю визначають шукані функції всередині скінченного елемента через їх значення у вузлових точках, заданих в умовах однозначності.

Математично МСЕ базується на *узагальненому методі Релея – Рітца – Галеркіна* [7], який забезпечує мінімізацію функціонала потенціальної енергії шляхом відшукування комбінації пробних функцій:

$$\varphi = \sum_1^N (a_i \varphi_i), \quad (1.21)$$

де a_i – коефіцієнти, які визначаються з N алгебраїчних рівнянь; φ_i – пробні функції, що забезпечують простоту розрахунків і достатню точність. Порівняно з названим методом Релея – Рітца – Галеркіна особливість МСЕ полягає в тому, що пробні функції φ_i приймають кусково-поліномними, які відрізняються від нуля тільки в околі одного вузла, а коефіцієнти a_i мають певний фізичний зміст.

Часто як базовий МСЕ застосовується у формі метода переміщень, наприклад, для встановлення характеру розподілу напружень і деформацій в прорізній пружині, навантаженій осьовою силою. В цьому випадку системі алгебраїчних рівнянь, що дозволяє визначити напруження та деформації в кожній вузловій точці, наприклад, прорізної пружини, отримують шляхом мінімізації її потенціальної енергії, вираженої через поле переміщень вузлових точок. Фізичний зміст рівнянь системи простий: вони описують рівновагу вузлів системи, а шукані невідомі є компонентами вузлових переміщень, які відповідають ваговим коефіцієнтам a_i , що використовуються в методі Релея – Рітца – Галеркіна.

Розрахунок за допомогою МСЕ у формі метода переміщень здійснюється за такими етапами:

- розбивання конструкції, наприклад, прорізної пружини на скінченні елементи та підготовка геометричної і фізичної інформації;
- побудова для виділених скінченних елементів відповідних матриць жорсткості, мас тощо та векторів, що визначають залежності між реакціями та переміщеннями у вузлах елемента;
- формування розв’язуючої системи алгебраїчних або диференціально-алгебраїчних (застосовуються в нестационарних, наприклад, динамічних задачах) рівнянь;
- розв’язування отриманої системи рівнянь і встановлення полів переміщень (деформацій), внутрішніх силових факторів (зусиль, напружень тощо);
- оброблення результатів розрахунку та їх аналіз.

В загальному випадку об’єкт (тіло, процес тощо), що розраховується за допомогою МСЕ, може розбиватись, в залежності від особливостей задачі, яку необхідно розв’язати, на скінченні елементи різної форми: прямолінійні стержні постійного перерізу; прямокутні в плані оболонки; чотирикутні, квадратні та прямокутні в плані пластини; кругові кільця трикутного, чо-

трикутного та прямокутного поперечного перерізу; чотири- п'яти- та шестигранні об'ємні елементи.

На сучасному етапі розвитку методів розрахунку різних конструкцій і деталей машин розроблено багато комп'ютерних програм і бібліотек, побудованих на основі МСЕ. Математичний апарат МСЕ базується на основі матричного та варіативного числень.

1.3.2 Натурний зразок прорізної пружини або її робочий кресленик

Робочий кресленик прорізної пружини показано на рис. 1.8. Викладач, що проводить лабораторне заняття, замість робочого кресленика прорізної пружини може видати натурний зразок пружини.

На робочому кресленнику вказані основні геометричні розміри пружини: $D = 28 \text{ мм}$ – зовнішній діаметр; $a = b = 2,5 \text{ мм}$ – відповідно ширина та товщина кільця; $R = 0,5(D - a) = 12,75 \text{ мм}$ – середній радіус; $n = 5$; $z = 2$.

Не вказані на кресленнику відхилення розмірів: отворів за $H 12$; валів за $h12$; інших за $IT 12 / 2$.

Матеріал пружини – сталь 60С2А ГОСТ 8559-75. Термічне оброблення – гартування за температури фазового перетворення $870 \text{ }^\circ\text{C}$, охолодження в мастилі та відпуск за температури $420 \text{ }^\circ\text{C}$. Після термічного оброблення, пружина матиме такі очікувані середні механічні властивості (таблиця 1.1):

Таблиця 1.1 – Очікувані механічні властивості матеріалу пружини після термічного оброблення

Межа міцності під час розтягу, σ_s МПа	Межа текучості $\sigma_{0,2}$ МПа	Твердість, HRCe	Ударна в'язкість (КСУ), Дж/см ²
1570	1375	47 – 50	62

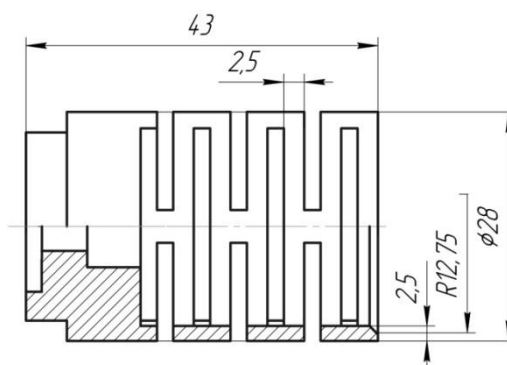


Рисунок 1.8 – Робочий кресленик прорізної пружини

1.3.3 Порядок виконання лабораторної роботи

1.3.3.1 Отримати у викладача, що проводить лабораторне заняття, робочий кресленик прорізної пружини або її натурний зразок. У випадку отримання натурального зразка прорізної пружини виконати її ескізний кресленик, виміряти всі основні геометричні розміри пружини та проставити їх на ескізному кресленнику, а також навести на ньому технічні умови (за інформацією викладача): вид термічного оброблення; твердість поверхні; не вказані відхилення розмірів тощо.

1.3.3.2 Оскільки прорізна пружина, зображена на рис. 1.8 [8], є суміщеною з поршнем (поршень – прорізна пружина (ППП) гідроімпульсного пристрою, то максимальне осьове її навантаження F_{max} розрахувати за простою формулою

$$F_{max} = p_{max} \cdot A_n = p_{max} \cdot \pi \cdot D^2 / 4, \quad (1.22)$$

де $p_{max} = 10$ МПа – максимальний робочий тиск енергоносія в гідроімпульсному пристрої; $A_n = \pi \cdot D^2 / 4 = 3,14 \cdot 0,028^2 / 4 = 6,15 \cdot 10^{-4}$ м² – площа поперечного перерізу ППП (тут $D = 28$ мм – діаметр поршня ППП дорівнює зовнішньому діаметру прорізної пружини).

1.3.3.3 Орієнтовну жорсткість прорізної пружини розрахувати за формулою (1.13), а за залежностями (1.10), (1.11) та (1.14) оцінити її міцність, взявши для сталі 60С2А модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа [2].

1.3.3.4 Ввести геометричні та силові характеристики натурального зразка прорізної пружини (або її робочого кресленика) в підпрограму «APM FEM: прочностной анализ» з програмного пакета КОМПАС-3D V13 і встановити характер розподілу напружень і деформацій в поперечних перерізах кілець пружини.

1.3.3.5 Результати виконання лабораторної роботи оформити як звіт, в якому відобразити:

- в конспективному викладенні короткі теоретичні відомості про пружини високої жорсткості та розрахунки деталей машин методом скінчених елементів;
- описання натурального зразка прорізної пружини (з наведенням її ескізного кресленика) або її робочого кресленика за рис. 2.1, який повинен входити у звіт;
- результати розрахунку орієнтовної жорсткості прорізної пружини та перевірних розрахунків її на міцність;
- графічні результати розрахунку заданої прорізної пружини МСЕ за вказаною комп'ютерною підпрограмою;
- аналіз отриманих результатів у вигляді висновків з виконаної роботи;
- звіт з лабораторної роботи оформити згідно з вимогами ДСТУ 3008 : 2015.

1.3.4 Контрольні питання для самоперевірки

- 1.3.4.1 Які види пружин відносять до пружин високої жорсткості?
- 1.3.4.2 Якими способами можна виготовляти прорізні та тарілчасті пружини?
- 1.3.4.3 Назвіть основні геометричні параметри прорізних пружин.
- 1.3.4.4 Який вид напруженого стану має місце в поперечних перерізах кільця прорізної пружини?
- 1.3.4.5 Де розташовані небезпечні перерізи у прорізних пружинах?
- 1.3.4.6 За якою залежністю можна оцінити орієнтовну жорсткість прорізної пружини?
- 1.3.4.7 За якою залежністю виконують перевірний розрахунок прорізних пружин на міцність?
- 1.3.4.8 За якими ознаками класифікують тарілчасті пружини?
- 1.3.4.9 Наведіть основні схеми за якими конструюють пакети (комплекти) тарілчастих пружин?
- 1.3.4.10 За якою залежністю можна оцінити орієнтовну жорсткість тарілчастої пружини? Від співвідношення яких параметрів тарілчастої пружини залежить її жорсткість?
- 1.3.4.11 В яких випадках доцільно використовувати кільцеві пружини?
- 1.3.4.12 Поясніть принцип роботи кільцевої пружини. Які види напружень виникають в поперечних перерізах зовнішніх і внутрішніх кільця пружини?
- 1.3.4.13 Наведіть і поясніть залежності для розрахунку деформації (осідання) кільцевої пружини, навантаженої осьовим зусиллям.
- 1.3.4.14 За яким залежностями виконують перевірний розрахунок кільцевих пружин на міцність? Поясніть фізичний зміст цих залежностей.
- 1.3.4.15 За якою орієнтовною формулою можна оцінити жорсткість кільцевої пружини?
- 1.3.4.16 Яке фізичне явище обумовлює високу поглинальну (розсіювальну) здатність кільцевих пружин?
- 1.3.4.17 В чому полягає суть МСЕ?
- 1.3.4.18 Які основні етапи розрахунку технічних об'єктів (процесів, конструкцій тощо) за МСЕ?
- 1.3.4.19 На якому математичному методі ґрунтується МСЕ? Які розділи вищої математики забезпечують реалізацію МСЕ?
- 1.3.4.20 На які геометричні форми скінчених елементів, в залежності від особливостей задачі, що розв'язується за допомогою МСЕ, може розбиватись об'єкт розрахунку?
- 1.3.4.21 За якими етапами здійснюється МСЕ у формі метода переміщень?

Література

1. Заплетохин В. А. Конструирование деталей механических устройств: справочник / В. А. Заплетохин – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 669 с.
2. Пономарев С. Д., Андреева Л. Е. Расчет упругих элементов машин и приборов / С. Д. Пономарев, Л. Е. Андреева – М. : Машиностроение, 1980. – 336 с.
3. Решетов Д. Н. Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. и механических спец. вузов / Решетов Д. Н. – [4-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.
4. Биргер И. А. Расчет на прочность деталей машин : справочник / Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. – [4-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 1993. – 640 с.
5. Мяченков В. И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник / Мяченков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. и др.; под общ. ред. Мяченкова В. И. – М. : Машиностроение, 1989. – 520 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике : пер. с англ. / Зенкевич О. – М. : Мир, 1975. – 544 с.
7. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
8. Обертюх Р. Р. Пристрої для віброточіння на базі гідроімпульсного привода : монографія / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 164 с.

1.4 Лабораторна робота № 3. Оптимізація на ЕОМ геометричних параметрів прорізної пружини за критерієм її мінімальної маси та заданих жорсткості і максимальної деформації

Мета роботи. Оптимізувати методом множників Лагранжа геометричні параметри прорізної пружини за критерієм її мінімальної маси та заданих жорсткості і максимальної деформації.

1.4.1 Короткі теоретичні відомості про методи оптимізації процесів і конструкцій

Теорію оптимізації можна розділити на два великі розділи, що принципово відмінні між собою: оптимальне керування та оптимальне проектування (оптимізація конструкцій) [1]. Математичний апарат цих розділів оптимізації не однаковий.

Теорія оптимального керування в основному ґрунтується на знаходженні критеріїв керування за зворотнім зв'язком в керуючій системі. Система, яка є оптимально керованою, має активні елементи, які сприймають

помилки на виході, що виникають через флуктуації у вхідних даних, і змінюють керуючу реакцію системи з метою максимізації якогось критерію якості системи.

У випадку оптимального проектування визначають елементи системи, або параметри, що описують ці елементи, які фіксовані протягом часу «життя» елементів.

Принципова різниця в завданні оптимального керування та проектування полягає в тому, що у випадку оптимального проектування вибрані значення змінних фіксовані протягом всього «життя» системи, а у випадку оптимального керування за зворотнім зв'язком значення змінних перебудовуються під час функціонування системи.

В літературі [2] по оптимальному керуванню, наприклад, в теорії автоматичного керування, більшою мірою розглядається динамічні системи, функціонування яких розвивається в часі (задача Коші).

Більшість задач оптимального проектування до динамічних систем не відносяться.

Оптимізацією називають формалізований ітераційний процес віднаходження таких вхідних параметрів, наприклад механічної системи, за яких її вихідні параметри (якісні показники) набувають, в певному сенсі, найкращих значень.

Визначення, що наведено, є так званою *параметричною оптимізацією* [1, 3], яка має ключове значення під час процесів проектування різних інженерних об'єктів, що відповідають заданим технічним вимогам.

Проблема параметричної оптимізації має два найбільш важливих аспекти. Перший з них – це формування критеріїв оптимальності, оскільки, твердження «об'єкт оптимальний» завжди вимагає доповнення, а з якої точки зору, за яким критерієм?

Оскільки можна по різному сформулювати, наприклад, різні цілі розрахунку інженерного об'єкта і в залежності від цього отримати різні розв'язки задачі оптимізації.

Формулювання критерію (чи критеріїв) завжди здійснюють, виходячи з конкретної фізичної суті задачі.

Другий аспект проблеми полягає у виборі методів та алгоритмів вирішення задачі оптимізації за вибраним критерієм.

Критерій оптимальності (якості) – це за суттю критерій порівняння варіантів розв'язку задачі проектування інженерних об'єктів, технологічних процесів, розрахунку тощо.

З метою розв'язку оптимізаційної задачі, наприклад, вибору оптимального варіанта конструкції якогось виробу, критерій (чи критерії) оптимальності необхідно визначити через *змінні проектування* b_1, b_2, \dots, b_k (параметри оптимізації) у вигляді функції [1]

$$\psi_0(b) = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T. \quad (1.23)$$

Залежності типу (1.23) називаються *цільовими функціями*.

На функцію (1.23) зазвичай, накладають обмеження, які задають в загальному випадку у вигляді рівнянь і нерівностей [1, 3]:

$$g(b) = 0; \quad h(b) \leq 0, \quad (1.24)$$

де $g(b) = 0$ та $h(b) \leq 0$ – вектор-функції. Якщо цільова функція залежить від однієї змінної проектування, то в площині декартової системи координат («площині» проектування) вона може бути зображена деякою кривою $\psi(x_1) = 0$ (чи $\psi_0(b_1)$).

У випадку двох змінних проектування цільову функцію зображають у формі поверхні $\psi(b_1, b_2)$ в просторовій системі координат («простір» проектування).

У випадку однієї змінної проектування (найпростіший випадок) шляхом перебору декількох варіантів можна вибрати найбільш прийнятний варіант виробу. Якщо варіантів варіювання змінних проектування два та більше, то вже важко вловити їх вплив на головні характеристики виробу. В цьому випадку ефективними є *математичні методи оптимізації*, за якими вибираються найкоротші шляхи оптимізації та скорочується час на розрахунок виробів, процесів тощо.

В загальному випадку задача оптимізації зводиться до задачі нелінійного програмування, яка може бути розв'язана тільки за відповідних спрощуючих припущень.

Методи нелінійного програмування (методи оптимізації) ділять на методи *нульового, першого та другого порядку* [1] в залежності від того яка інформація використовується для визначення напрямку пошуку оптимального варіанта конструкції виробу, технологічного процесу тощо.

За методами нульового порядку не потрібно розраховувати похідні цільової функції за змінними проектування (керування), а за методами першого та другого порядку потрібно вираховувати відповідно перші та другі похідні. До *методів нульового порядку* відносяться методи Гаусса – Зейделя, Розенброка та випадкового пошуку.

Методами першого порядку є методи градієнта, найшвидшого спуску, спряжених градієнтів і траєкторії вектора градієнта.

Зазвичай методи другого порядку – це різновидності методу Ньютона.

Перераховані методи, за винятком метода проекції вектора градієнта, розроблені як методи *безумовної оптимізації* [1]. В задачах з обмеженнями ці методи можуть бути використані, якщо вдається задачі *умовної оптимізації* звести до задач *безумовної оптимізації*. Таке перетворення здійснюють за, так званими, методами штрафних функцій.

За змістом методи оптимізації можуть бути *аналітичними* та *алгоритмічними*. Екстремум цільової функції в аналітичних методах визначається формулою, що є основною перевагою цих методів, але для використання

аналітичних методів необхідне явне вираження цільової функції, що реально вдається зробити дуже рідко.

Такого недоліку позбавлені *алгоритмічні методи*, які не дають кінцевої формули, а лише визначають спосіб знаходження екстремуму цільової функції.

Аналітичні методи оптимізації ділять на *регулярні*, якщо початкове значення вектора змінних проектування (вектора входу) однозначно визначає всі його наступні значення, та *статистичні*, якщо всі наступні значення вектора входу зв'язані з попередніми випадковим числом. Більшість регулярних методів оптимізації відносяться до класу *градієнтних*, в основі яких лежить або розрахунок градієнта цільової функції, якщо остання задана в явному вигляді, або вимірювання цього градієнта шляхом «пробних кроків», коли цільова функція задана неявно. До *статистичних методів* оптимізації відносять *методи випадкового пошуку* та *адаптивні методи* [1].

За типом *екстремуму*, що *шукається*, методи оптимізації ділять на *локальні* та *глобальні*.

Процес оптимізації можна умовно назвати *пошуком цілі*, якою є *шукана оптимальна точка*. Точка яка характеризує положення об'єкта оптимізації в просторі його вхідних параметрів, називають *зображувальною*, або *робочою*.

Пошук цілі – це послідовне переміщення *робочої точки* в напрямку зменшення відстані до цілі. Кожне переміщення робочої точки називається *кроком оптимізації*, який складається з двох етапів:

1) збирання інформації, необхідної для вибору напрямку руху робочої точки;

2) визначення напрямку та величини кроку оптимізації та цільової функції в новій робочій точці.

Для визначення напрямку руху робочої точки на першому етапі зазвичай розраховують цільову функцію в сусідніх пробних точках. Число таких визначень, необхідне щоб зробити один крок оптимізації, називається *втратами на пошук*. Зазвичай на ці втрати необхідно більше часу, ніж на другий етап кроку оптимізації, тому ці втрати є основною *характеристикою швидкодії алгоритму оптимізації*.

Важливою характеристикою оптимізації є також надійність пошуку – це ймовірність того, що за заданого числа кроків оптимізації N робоча точка буде в заданому околі ε цілі.

В залежності від околу об'єкта оптимізації та задачі, яку потрібно розв'язати, цільову функцію можна задавати по-різному (в літературі та програмному забезпеченні САПР зазвичай передбачені бібліотеки типових цільових функцій). Наприклад, цільовою функцією може бути *цільова функція максимального відхилення* [1] характеристик об'єкта від заданих

$$\psi_0(b_1, \dots, b_n) = \max(\omega_1/l_1, \omega_2/l_2, \dots, \omega_m/l_m) \quad (1.25)$$

або середньоквадратична цільова функція виду

$$\psi_0(b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot l_i^2 \quad (1.26)$$

де ω_i – питома вага окремих складових вектора відхилення характеристик l_i .

Цільова функція, визначена за формулою (1.25), як правило, має розриви в перших частинних похідних, що утруднює використання ефективних методів оптимізації, які ґрунтуються, наприклад, на теоремі Тейлора (розкладенні в ряд Тейлора), яка вимагає неперервності цих похідних.

Цільова функція, знайдена за залежністю (1.26), навпаки, є диференційованою по відношенню до всіх своїх аргументів, тобто існують частинні похідні $\partial\psi_0/\partial b_i$, $i = 1, \dots, n$. У такому випадку в точці локального оптимуму \bar{b} необхідно, але не достатньо [1], щоб

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial b}(\bar{b}) = 0, \quad (1.27)$$

тобто для будь-якого i $\frac{\partial\psi_0}{\partial b_i} = 0$.

Умова (1.27), справедлива і для інших більш складних, ніж (1.26), нелінійних цільових функцій, визначає критичні точки функції $\psi_0(b)$: мінімуму, максимуму та сідлові.

Але це не означає, що якщо навіть знайдено локальний оптимум функції $\psi_0(b)$, що цей оптимум є *глобальним для загальної нелінійної функції* $\psi_0(b)$. Щоб це установити потрібна додаткова інформація про функцію $\psi_0(b)$: чи має вона єдиний локальний оптимум, чи є лінійною, квадратичною або опуклою тощо.

Зазвичай точки локального оптимуму шукають за допомогою методів нелінійного програмування, за якими розрізняють дві задачі оптимізації у вигляді:

$$\min \psi_0(b), \quad (1.28)$$

що є задачею оптимізації (безумовна оптимізація) без обмежень [1];

$$\begin{cases} \min \psi_0(b); \\ g(b) = 0; h(b) \leq 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

яка є задачею оптимізації (умовна оптимізація) з обмеженнями у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей [1]. У залежностях (1.29) g та h – вектор-функції від « b » у загальному випадку, наприклад

$g(b) = [g_1(b), \dots, g_m(b)]^T$, де $g_i(b)$ – скалярна нелінійна функція вектора « b »; $i = 1, \dots, m$.

Задачі параметричної оптимізації з обмеженнями у вигляді (1.29) часто зустрічаються під час інженерного проектування виробів, технологічних процесів тощо. Найбільш загальним типом обмежень в таких задачах є двобічні обмеження на параметри об'єкта оптимізації виду $\alpha_i \leq b_i \leq \beta_i (i = 1, \dots, n)$.

Слід відмітити, що реалізація якісної оптимізації об'єктів проектування чи дослідження може бути за допомогою достатньо складних аналітичних і числових математичних процедур.

Одним із потужних методів оптимального проектування є метод множників Лагранжа [1, 3], який ґрунтується, на так званій, необхідній умові оптимальності Куна – Такера [1]. В спрощеному варіанті ця умова формулюється так: існують множники $v_i \geq 0$ (тут $i = 1, 2, 3, \dots, n$ за кількістю обмежень $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$) такі, що

$$v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = \dots = v_n \cdot \psi_n = 0, \quad (1.30)$$

а також
$$\partial [L(b_j^{\text{опт}}, v_i)] / \partial \psi_j = 0, \quad (1.31)$$

де
$$L(b_j^{\text{опт}}, v_i) = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^n (v_i \cdot \psi_i) - \quad (1.32)$$

математичний вираз, який називається лагранжіаном [1]; $j = 1, 2, \dots, n$; $b_j^{\text{опт}}$ – точка локального оптимуму; $\psi_0(b)$ – цільова функція.

1.4.2 Постановка задачі умовної оптимізації прорізної пружини, постійні та змінні параметри під час її проектування

Необхідно оптимізувати методом множників Лагранжа геометричні параметри прорізної пружини за критерієм її мінімальної маси та таких постійних і змінних параметрів:

1) постійні параметри: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності матеріалу пружини (сталь 60С2А ГОСТ 8559-75); $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ – густина матеріалу пружини; $[\sigma] = 500$ МПа – допустиме напруження згину для матеріалу пружини [4]; $z = 2$ – число прорізів; $h_{\text{пп}}^{\text{max}} = 6,4 \cdot 10^{-4}$ м – максимальна деформація (осадження) пружини; $k_{\text{mn}} = 7,8 \cdot 10^5$ Н/м – жорсткість пружини; $F_{\text{max}} = 500$ Н – максимальне зусилля пружини;

2) змінні параметри (змінні проектування): $a = b$ – відповідно ширина та товщина робочого кільця пружини; R – середній радіус пружини; n – число робочих кілець пружини.

Число перемичок n_n прорізної пружини зв'язано з числом її робочих кілець n простою залежністю

$$n_n = 2(n + 1). \quad (1.33)$$

Прорізна пружина має два ($n_{on} = 2$) опорних кільця, товщину a_{on} кожного з яких, з метою забезпечення їх міцності та жорсткості, згідно з рекомендаціями роботи [5], можна прийняти: $a_{on} = (2 \dots 3)a$. В лабораторній роботі прийняти $a_{on} = 3a$. Перемички прорізної пружини за формою є частиною циліндричної труби з середнім радіусом R і шириною (товщиною) стінки a . З метою спрощення, висоту перемички прийняти рівною ширині a (ширина прорізи) робочого кільця пружини, а форму у вигляді куба з ребром рівним a .

Під час математичного описання оптимізаційної задачі, для наведених постійних і змінних параметрів прорізної пружини, її жорсткість k_{nn} і еквівалентне напруження $\sigma_{екв}$ в небезпечних перерізах робочих кілець визначати за спрощеними залежностями [6, 7, 8]:

$$k_{nn} = (1,035 \cdot E \cdot a^4) / (R^3 \cdot n); \quad (1.34)$$

$$\sigma_{екв} = (1,22 \cdot F_{max} \cdot R) \cdot a^{-3} \leq [\sigma]. \quad (1.35)$$

Згідно з метою лабораторної роботи, цільовою функцією $\psi_0(b)$ цієї оптимізаційної задачі є маса прорізної пружини, яку можна представити у вигляді суми трьох мас:

$$\begin{aligned} \psi_0(b) = m_{рк} + m_{on} + m_n = 2 \cdot \rho \cdot a^2 \cdot [\pi \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n + 1)] = 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \times \\ \times [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n + 1)], \end{aligned} \quad (1.36)$$

де $m_{рк} = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a^2 \cdot R \cdot n$, $m_{on} = 6 \cdot \pi \cdot \rho \cdot a^2 \cdot R \cdot n_{on}$, $m_n = \rho \cdot a^3 \cdot n_n$ – відповідно, маси робочих та опорних кілець і перемичок прорізної пружини.

Змінними проектування b у цільовій функції $\psi_0(b)$ є параметри прорізної пружини a , R , та n , що мають обмеження за знаком, які є очевидними,

$$\psi_1 \equiv a \geq 0; \quad \psi_2 \equiv R \geq 0; \quad \psi_3 \equiv n \geq 0; \quad (1.37)$$

і функціональне

$$\begin{aligned} \psi_4 = \sigma_{екв} - [\sigma] = (1,22 \cdot F_{max} \cdot R) \cdot a^{-3} - [\sigma] = 6,10 \cdot 10^2 \cdot R \cdot a^{-3} - 5 \cdot 10^8 = \\ = 1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Виразивши з формул (1.34) і (1.35) середній радіус R пружини та порівнявши отримані залежності, знайдемо ще одне функціональне обмеження цільової функції $\psi_0(b)$:

$$\psi_5 = [(1,035 \cdot E / k_{nn}) - ([\sigma]^3 \cdot a^5 \cdot n) / (1,22^3 \cdot F_{max}^3)] =$$

$$= 2,65 \cdot 10^5 - 5,51 \cdot 10^{17} \cdot a^5 \cdot n = 1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n = 0. \quad (1.39)$$

Використовуючи формулу (1.32), запишемо лагранжیان для розглядуваної оптимізаційної задачі:

$$L = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^5 (v_i \cdot \psi_i) = 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n+1)] + v_1 \cdot a + v_2 \cdot R + v_3 \cdot n + v_4 \cdot (1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1) + v_5 \cdot (1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n), \quad (1.39)$$

де v_1, \dots, v_5 – множники Лагранжа.

Для виконання умови оптимальності Куна – Такера (1.30), $v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = v_3 \cdot \psi_3 = v_4 \cdot \psi_4 = v_5 \cdot \psi_5 = 0$, необхідно, щоб $v_i = 0$ або $\psi_i = 0$. Очевидно, що вимога $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ немає фізичного змісту, тоді $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, а оскільки $\psi_4 = \psi_5 = 0$, то $v_4 > 0$ та $v_5 > 0$. З урахуванням зроблених зауважень, залежність (1.39) набуде вигляду:

$$L = 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot [3,14 \cdot R \cdot (n + 6) + a \cdot (n+1)] + v_4 \cdot (1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1) + v_5 \cdot (1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n), \quad (1.40)$$

З метою знаходження оптимальних значень змінних проектування a, R , та n , візьмемо, згідно з (1.31), частинні похідні з точністю до двох знаків після коми в числових коефіцієнтах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial L / \partial \psi_1 \equiv \partial L / \partial a = 9,80 \cdot 10^4 \cdot a \cdot R \cdot (n + 6) + 4,68 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot (n + 1) - \\ - 3,66 \cdot 10^6 \cdot v_4 \cdot a^{-4} \cdot R - 1,04 \cdot 10^{13} \cdot v_5 \cdot a^4 \cdot n = 0; \\ \partial L / \partial \psi_2 \equiv \partial L / \partial R = 4,90 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot (n + 6) + 1,22 \cdot 10^6 \cdot v_4 \cdot a^{-3} = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 \equiv \partial L / \partial n = 4,90 \cdot 10^4 \cdot a^2 \cdot R + 1,56 \cdot 10^4 \cdot a^3 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot v_5 \cdot a^5 = 0; \\ \partial L / \partial v_4 \equiv \psi_4 = 1,22 \cdot 10^6 \cdot R \cdot a^{-3} - 1 = 0; \\ \partial L / \partial v_5 \equiv \psi_5 = 1 - 2,08 \cdot 10^{12} \cdot a^5 \cdot n = 0. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Аналіз системи рівнянь (1.41) показує, що в другому її рівнянні множник $v_4 < 0$, що не можливо за визначенням методу Лагранжа, тому необхідно прийняти $v_4 = 0$, в зв'язку з чим це рівняння втрачає фізичний зміст, оскільки інші складові рівняння не можуть бути рівними нулю.

Враховуючи сказане вище і виразивши з двох останніх рівнянь системи (1.41) параметри R та n через змінну проектування a ,

$$R = 8,20 \cdot 10^5 \cdot a^3; \quad (1.42)$$

$$n = 4,81 \cdot 10^{-13} \cdot a^{-5}, \quad (1.43)$$

та підставивши їх в перше і третє рівняння цієї системи, приведемо систему (1.41) до більш простого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial L / \partial \psi_1 \equiv \partial L / \partial a = 1,59 \cdot 10^{13} \cdot a^5 + 1,21 \cdot 10^6 \cdot a^3 + 5,81 \cdot 10^{-7} \cdot a^{-2} - \\ - 1,29 \cdot 10^2 \cdot v_5 + 1 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 \equiv \partial L / \partial n = 2,58 \cdot 10^6 \cdot a^2 \cdot (1 - 5,16 \cdot 10^1 \cdot v_5) + 1 = 0, \end{array} \right. \quad (1.44)$$

де розмірність a в метрах, а множник v_5 – безрозмірна величина. З другого рівняння системи (1.44) можна встановити взаємну залежність між множником v_5 і параметром проектування a :

$$v_5 = 1,94 \cdot 10^{-2} + 7,51 \cdot 10^{-9} \cdot a^{-2}. \quad (1.45)$$

Для розв'язування системи рівнянь (1.44) можна використовувати систему комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проектування типу Mathcad, Maple, Mathematica, MATLAB і т. ін. На рисунку 1.9 показано приклад розв'язування системи рівнянь (1.44) в Mathcad.

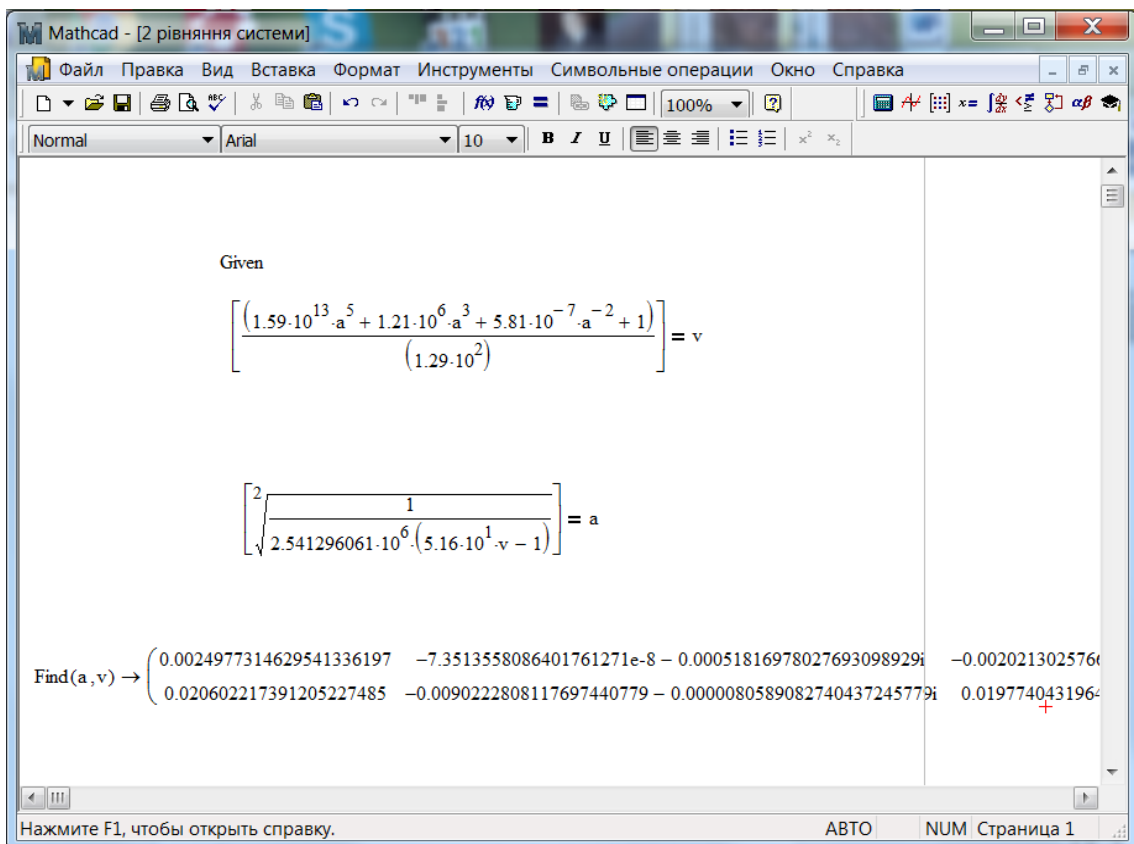


Рисунок 1.9 – Приклад розв'язування системи рівнянь (1.44) в Mathcad

1.4.3 Порядок виконання лабораторної роботи

1.4.3.1 Ввести в комп'ютерну програму Mathcad постійні та змінні параметри прорізної пружини, залежності (1.42) і (1.43) та систему алгебраїчних рівнянь (1.44), що наведені в підрозділі 1.4.2 методичних вказівок до цієї лабораторної роботи.

1.4.3.2 Запустити в роботу комп'ютерну програму та отримати розв'язок системи рівнянь (1.44).

1.4.3.3 Проаналізувати отримані результати оптимізації геометричних параметрів прорізної пружини за критерієм її мінімальної маси та зробити висновки щодо їх коректності та реальності.

1.4.3.4 За отриманими геометричними параметрами прорізної пружини та додатковими даними, наведеними в другому розділі методичних вказівок до цієї лабораторної роботи, виконати ескізний кресленик розрахованої пружини.

1.4.3.5 Результати виконання лабораторної роботи оформити як звіт, в якому відобразити:

- в конспективному викладенні короткі теоретичні відомості про методи оптимізації процесів і конструкцій;
- постановку задачі умовної оптимізації прорізної пружини методом множників Лагранжа за критерієм її мінімальної маси з математичним описанням оптимізаційної задачі;
- результати комп'ютерної оптимізації геометричних параметрів прорізної пружини за критерієм її мінімальної маси;
- ескізний кресленик розрахованої прорізної пружини;
- аналіз отриманих результатів у вигляді висновків з виконаної роботи;
- звіт з лабораторної роботи оформити згідно з вимогами ДСТУ 3008 : 2015.

1.4.4 Контрольні питання для самоперевірки

1.4.4.1 Що розуміють під поняттям – оптимізація?

1.4.4.2 На які основні розділи поділяють оптимізацію?

1.4.4.3 В чому полягає принципова різниця між оптимальним керуванням та оптимальним проектуванням?

1.4.4.4 Що розуміють під поняттям – критерії оптимальності?

1.4.4.5 Наведіть означення поняттю – цільова функція. Запишіть і поясніть цільову функцію у вигляді найбільш загальної математичної залежності.

1.4.4.6 Як у загальному випадку задаються обмеження цільової функції? Поясніть суть цих обмежень.

1.4.4.7 Які методи оптимізації відносять до безумовної оптимізації?

1.4.4.8 Які переваги та недоліки мають аналітичні та алгоритмічні методи оптимізації?

- 1.4.4.9 На які види поділяють аналітичні методи оптимізації?
- 1.4.4.10 Що розуміють під поняттям – оптимальна точка?
- 1.4.4.11 З яких етапів складається процес пошуку цілі – оптимальної точки?
- 1.4.4.12 Що розуміють під поняттям – цільова функція максимального відхилення та середньоквадратична цільова функція?
- 1.4.4.13 В чому полягає принципова різниця між безумовної та умовною оптимізацією?
- 1.4.4.14 На якій умові ґрунтується метод множників Лагранжа? Запишіть і поясніть математичні залежності, що описують метод множників Лагранжа.
- 1.4.4.15 Запишіть і поясніть лагранжіан для оптимізації прорізної пружини, наведений в другому розділі методичних вказівок до цієї лабораторної роботи.

Література

1. Хог Э. Прикладное оптимальное проектирование / Э. Хог, Я. Арора. – М. : Мир, 1983. – 479 с.
2. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. – М. : Мир, 1972. – 468 с.
3. Иосилевич Г. Б. Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. спец. вузов / Г. Б. Иосилевич – М. : Машиностроение, 1988. – 368 с.
4. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя : в 3 томах / В. И. Анурьев ; под ред. И. Н. Жестковой. – [8-е изд. перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 2001: Т. 1. – 920 с.
5. Обертюх Р. Р. Пристрої для віброточіння на базі гідроімпульсного привода : монографія / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 164 с.
6. Биргер И. А. Расчет на прочность деталей машин : Справочник / Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. – [4-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 1993.– 640 с.
7. Пономарев С. Д., Андреева Л. Е. Расчет упругих элементов машин и приборов / С. Д. Пономарев, Л. Е. Андреева – М. : Машиностроение, 1980. – 336 с.
8. Заплетохин В. А. Конструирование деталей механических устройств: Справочник / В. А. Заплетохин – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 669 с.

2 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

2.1 Планування СРС

На кафедрі Галузевого машинобудування (ГМ) Факультету машинобудування та транспорту (ФМТ) ВНТУ планування СРС з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» здійснюється на основі навчальної (НП) та робочої навчальної програм (РНП) і робочих навчальних (РНПД) планів дисципліни. В РНПД наводиться перелік тем за змістом дисципліни, що виносяться на СРС. Темі СРС розділені згідно поділу дисципліни на модулі. В кожній темі СРС є посилання на навчально-методичну (НПЛ) та інструктивно-методичну (ІМЛ) літературу.

2.2 Організація СРС

Кожного триместру згідно розкладу занять, доведеного деканатом ФМТ, на кафедрі ГМ в установлені терміни складають графіки консультацій з дисципліни для студентів денної форми навчання (ДФН), графіки приїзду студентів заочної форми навчання (ЗФН) на установчу сесію (згідно розкладу занять, розробленого деканатом). Під час консультацій викладачі, що викладають дисципліну, надають студентам необхідну інформаційну допомогу та перевіряють правильність виконання індивідуальних завдань.

Лектори з на першій лекції знайомлять студентів з організацією вивчення дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» за кредитно-модульною системою навчання (КМСН), де обов'язково наводиться інформація про максимальну трудомісткість дисципліни в балах (100 балів), кількість модулів, терміни проведення та максимальну трудомісткість в балах модульних лекторських контрольних робіт. Дисципліна «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» в ФМТ вивчається в другому семестрі підготовки магістрів (ДФН). Підсумковий контроль на ДФН – іспит. Іспит може проводитись за тестовими контрольними завданнями, обсяг яких повністю відповідає змісту РНП дисципліни.

2.3 Форми СРС

Під час вивчення дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» використовуються такі форми СРС:

- вивчення теоретичного матеріалу дисципліни за конспектом лекцій, підручниками, навчальними посібниками, довідково-нормативною літературою, науково-технічними журналами тощо;
- підготовка теоретичної частини звітів до лабораторних робіт, виконання лабораторних робіт, оформлення звітів з лабораторних робіт і підготовка до їх захисту;
- підготовка до практичних занять за тематикою, наведеною в РНПД;
- підготовка до поточних і модульних лекторських контрольних робіт і диференційованого заліку;
- підготовка до іспиту шляхом розв’язування типових тестових контрольних завдань з дисципліни, наведених в підрозділі 2.3.1.

2.3.1 Типові тестові контрольні завдання

1. Що розуміють під поняттям матриця?

Відповіді.

1. Матриця – це таблиця чисел. 2. Матриця – це система чисел (елементів) які розташовані в прямокутній таблиці, що складається з рядків і стовпців. 3. Матриця – це квадратна таблиця з рядків і стовпців. 4. Матриця – це таблиця чисел, які можуть записуватись в таблицю рядками та стовпчиками в круглих або квадратних дужках.

2. Що розуміють під нульовою матрицею?

Відповіді.

1. Це матриця, що дорівнює нулю. 2. Це умовна матриця чисел, алгебраїчна сума чисел яких дорівнює нулю. 3. Такої матриці не існує. 4. Це прямокутна таблиця чисел, в якій кожен рядок і стовпець складається із чисел нуль.

3. Яку матрицю називають протилежною матриці, наприклад, A ?

Відповіді.

1. Протилежною матриці A називають матрицю, в якій стовпці є рядками матриці A . 2. Протилежною матриці A називають матрицю $-A$, в якій всі числа в рядках і стовпцях за модулем рівні числам в рядках і стовпцях матриці A , але мають знак «мінус». 3. Протилежною матриці A є трикутна матриця. 4. Протилежною матриці A є скалярна матриця.

4. В чому полягає різниця між матрицею-рядком і матрицею-стовпцем?

Відповіді.

1. Числа в матриці-рядок записують в рядок, а в матриці-стовпець – в стовпець. 2. Матриця-рядок і матриця-стовпець різняться за формою запису. 3. Матриця-рядок по відношенню до матриці-стовпець є транспо-

нованою і навпаки. 4. Матриця-рядок відрізняється від матриці-стовпець розмірністю.

5. Для якого типу спеціальних матриць пряма та транспонована матриці рівні між собою?

Відповіді.

1. Рівність прямих та транспонованих матриць є тільки для симетричних матриць. 2. Рівними можуть бути тільки кососиметричні прямі та транспоновані матриці. 3. Рівними можуть бути прямі та транспоновані ортогональні матриці. 4. Така рівність неможлива.

6. До якого типу моделей належить динамічна модель механічної системи?

Відповіді.

1. Динамічна модель – це діючий макет механічної системи. 2. Динамічна модель – це конструктивна схема механічної системи. 3. Динамічна модель – це ідеалізована фізична модель механічної системи. 4. Динамічна модель – це ідеалізована фізична модель механічної системи, в якій рухомі ланки механічної системи зображені як абстрактні маси чи моменти інерції мас, що взаємодіють між собою через пружні та дисипативні ланки чи в'язі під впливом зовнішніх сил.

7. Яку динамічну модель механічної системи називають динамічною моделлю із жорсткими ланками?

Відповіді.

1. Динамічною моделлю із жорсткими ланками називають модель з ланками у вигляді твердих тіл. 2. Динамічна модель із жорсткими ланками це модель механічної системи, ланки якої не деформуються. 3. В динамічній моделі з жорсткими ланками всі ланки рухаються в одній системі координат. 4. В динамічній моделі з жорсткими ланками всі ланки є абсолютно твердими тілами, гнучкі ланки не розтягуються, текучі ланки нестисливі, а кінематичні пари ідеально реалізують ті рівняння зв'язків, якими вони описуються.

8. В чому полягає відмінність одновимірної динамічної моделі від багатовимірної?

Відповіді.

1. Одновимірна динамічна модель складається з однієї жорсткої ланки. 2. Одновимірною динамічною моделлю механічної системи є модель, в якій кожне з абсолютно твердих тіл системи через накладені в'язі має один ступінь вільності. 3. Одновимірною динамічною моделлю механічної системи називається модель, в якій всі її ланки рухаються в одному напрямку. 4. Одновимірними динамічними моделями механічної системи є ланцюгові (не розгалужені) динамічні моделі.

9. За яких умов пружні та дисипативні ланки механічної системи можна вважати безінерційними елементами?

Відповіді.

1. Пружні та дисипативні ланки механічної системи можна вважати безінерційними елементами за умови малих їх мас чи моментів інерції мас порівняно з рухомими масами (моментами інерції мас) ланок механічної системи. 2. Пружини та демпфірувальні ланки механічної системи вважаються безінерційними елементами. 3. Пружні та дисипативні ланки механічної системи вважаються безінерційними елементами, якщо вони є абсолютно жорсткими тілами. 4. Пружні та дисипативні ланки механічної системи вважаються безінерційними (безмасовими) елементами, якщо їх розміри порівняно з рухомими масами системи малі.

10. В чому полягає відмінність між ланцюговими та розгалуженими динамічними моделями механічних систем?

Відповіді.

1. Ланцюгова динамічна модель механічної системи є одновимірною, а розгалужена – багатовимірною. 2. В ланцюгових динамічних моделях механічної системи всі абсолютно жорсткі ланки послідовно з'єднані пружними та дисипативними безінерційними елементами, а в розгалужених динамічних моделях одна із ланок (жорстка або безінерційна) може взаємодіяти з іншими жорсткими ланками через жорсткі чи пружнодисипативні в'язі. 3. В ланцюгових динамічних моделях жорсткі ланки послідовно переміщуються в напрямку двох і більше послідовних узагальнених координат, а в розгалужених динамічних моделях є одна узагальнена координата та багато, так званих, «деформаційних координат». 4. Ланцюгові динамічні моделі механічних систем складаються з дискретних абсолютно жорстких ланок, а розгалужені динамічні моделі складаються з ланок із розподіленими параметрами.

11. До якого виду моделей реального фізичного об'єкта відноситься його математична модель?

Відповіді.

1. Математична модель – це модель, яка за допомогою математичних залежностей імітує роботу реального об'єкту. 2. Математична модель є різновидом концептуальної моделі, в якій через сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, нерівностей, логічних співвідношень тощо) визначаються характеристики станів системи (механічної, гідравлічної, електричної тощо) в залежності від її параметрів, умов однозначності, вихідних сигналів і часу. 3. Математична модель відноситься до абстрактних моделей, які за допомогою математичних залежностей описують поведінку динамічних моделей механічних систем. 4. Математична модель є різновидом аналітичної моделі, в якій за допомогою різних типів

диференціальних рівнянь описуються взаємозв'язки і взаємодія між ланками динамічної моделі механічної системи.

12. В чому полягає відмінність між основними рівнями моделювання технічних систем – структурним (імітаційним), логічним і кількісним?

Відповіді.

1. Структурний, логічний і кількісний рівні моделювання технічних систем відрізняються ступенем деталізації опису технічної системи – об'єкта моделювання. 2. На структурному рівні моделювання технічної системи будуються алгоритмічні моделі (моделюючі алгоритми) системи, на логічному рівні складаються логічні рівняння безпосередніх зв'язків між елементами та вузлами функціональних ланок системи, а на кількісному рівні математична модель системи зображується у вигляді системи рівнянь – алгебраїчних або інтегро-диференціальних. 3. Структурний, логічний і кількісний рівні моделювання є ієрархічною системою моделювання, яка з різних сторін описує об'єкт дослідження. 4. Відмінність між структурним, логічним і кількісним рівнями моделювання полягає в різних методах моделювання досліджуваної системи.

13. В чому полягає різниця між рушійними (активними) та силами опору, що діють в механічній системі?

Відповіді.

1. Рушійні сили та сили опору відрізняються за напрямом дії та модулем. 2. Рушійні сили приводять ланки механічної системи в рух, а сили опору протидіють цьому рухові. Рушійні сили – це сили, що створюються різними двигунами, а сили опору – це сили тертя. 3. Рушійні сили здійснюють початкове переміщення ланок системи, а сили опору – це різні технологічні сили та сили тертя. 4. Сили опору – це сили тертя сухого та в'язкого, а рушійні – це технологічні сили.

14. Чи можуть активні (рушійні) сили бути позиційними?

Відповіді.

1. Ні, не можуть, позиційними можуть бути тільки сили опору. 2. Активні сили можуть бути функціями швидкості виконавчої ланки механічної системи, а позиційними є сили, величина яких залежить від положення виконавчої ланки. 3. Можуть, наприклад, коли пружина використовується як приводний двигун системи, або сила, що приводить поршень двигуна внутрішнього згорання в рух, яка залежить від ходу поршня, його швидкості та тиску продуктів згорання в циліндрі двигуна. 4. В загальному випадку рушійні сили залежать від часу, вихідних параметрів системи та їх похідних за часом, а позиційні сили – це сили різного виду пружних елементів.

15. В чому полягає відмінність в способах складання рівнянь руху ланок механічних систем за допомогою рівняння Лагранжа другого роду та принципу Д'Аламбера?

Відповіді.

1. Для того, щоб застосовувати для складання рівнянь руху ланок механічної системи рівняння Лагранжа другого роду потрібно знати залежності кінетичної та потенціальної енергії системи і узагальненні сили від узагальнених координат руху мас системи, а принцип Д'Аламбера полягає в застосуванні квазістатичних рівнянь рівноваги динамічної системи, коли в рівняння рівноваги сил додано сили інерції. 2. Рівняння Лагранжа другого роду – це диференціальне рівняння зміни кінетичної енергії та потенціальної енергії системи в частинних похідних, а рівняння руху ланок системи, складені за принципом Д'Аламбера – це рівняння статичної рівноваги сил, що діють на ланки механічної системи. 3. Відмінність в способах складання рівнянь руху ланок механічної системи за допомогою рівняння Лагранжа другого роду та принцип Д'Аламбера полягає в тому, що в першому випадку застосовують диференціальне рівняння в частинних похідних, а в другому випадку – звичайне диференціальне рівняння. 4. За допомогою рівняння Лагранжа другого роду рівняння руху ланок механічної системи знаходять, розв'язуючи рівняння Лагранжа, а використовуючи принцип Д'Аламбера рівняння руху ланок системи отримують через рівняння статичної рівноваги цих ланок.

16. Що розуміють під таким методом спрощення математичної моделі технічної системи як декомпозиція?

Відповіді.

1. Декомпозиція – це розділення математичної моделі на підмоделі. 2. Декомпозиція – це розчленування складної технічної системи на більш прості підсистеми, кінцевою метою якого є розбиття простору змінних в математичній моделі на більш прості підпростори, що містять змінні тільки одного порядку. 3. Декомпозиція – це коли підмоделі математичної моделі об'єкта мають вихідні функції з одинарними зв'язками з відповідними змінними математичної моделі. 4. Декомпозиція – це представлення математичної моделі об'єкта дослідження у вигляді сукупності підмоделей.

17. В чому полягає суть методу «макромодельовання» технічних систем?

Відповіді.

1. За методом «макромодельовання» будують спрощені математичні моделі технічних систем. 2. «Макромодельовання» – це метод спрощення математичної моделі технічної системи. 3. За методом «макромодельовання» математичні моделі технічних систем будують на основі виділення суттєвих властивостей і дій (впливів) технічних систем, а врахування несуттєвих властивостей і впливів, що діють в системах здійснюється в

параметричній формі. 4. У математичній моделі технічної системи, що побудована за методом «макромодельовання», враховують тільки ті вхідні змінні, які найбільш суттєво впливають на вихідні змінні математичної моделі.

18. Які методи використовуються для лінеаризації нелінійної вихідної математичної моделі технічної системи?

Відповіді.

1. Нелінійні математичні моделі технічних систем можна лінеаризувати такими методами: прямої лінеаризації, гармонічного балансу та осереднення (малих амплітуд) для коливних систем і відхилень. 2. Нелінійні математичні моделі технічних систем в лінійні перетворюють шляхом заміни нелінійних диференціальних рівнянь математичної моделі на лінійні. 3. Методом перетворення нелінійної математичної моделі технічної системи в лінійну є розкладання нелінійних складових в рівняннях, що описують нелінійну математичну модель, в числові ряди, наприклад, Тейлора. 4. Нелінійні математичні моделі технічних систем можна лінеаризувати шляхом зведення манок технічної системи з розподіленими параметрами до ідеальних ланок із зосередженими параметрами, а також нехтуванням динамічними властивостями процесів, що відбуваються в технічній системі.

19. Що розуміють під поняттям «адекватність» математичної моделі та об'єкта (предмета) досліджень?

Відповіді.

1. Адекватність математичної моделі та об'єкта (предмета) досліджень – це відтворення моделлю з необхідною точністю всіх властивостей об'єкта (предмета), суттєвих для цілей конкретного дослідження. 2. Адекватність математичної моделі – це повна відповідність моделі об'єкту (предмету) досліджень. 3. Математична модель об'єкта (предмета) досліджень будуть адекватними один одному, коли параметри реального об'єкта та математичної моделі співпадуть з точністю до 5%. 4. Об'єкт (предмет) досліджень і його модель будуть адекватними один одному тоді, коли вони будуть подібні між собою.

20. В чому полягає відмінність між ізоморфною та гомоморфною математичними моделями об'єкта (предмета) досліджень?

Відповіді.

1. Ці поняття рівнозначні між собою. 2. Об'єкт досліджень і його математична модель будуть ізоморфними, якщо між ними існує взаємоднозначна відповідність, а коли модель і об'єкт гомоморфні, тоді відповідність моделі об'єкту є однозначною, а навпаки такої відповідності немає. 3. Гомоморфна модель на відміну від ізоморфної не має всіх власти-

востей, що притаманні об'єкту (предмету) досліджень. 4. Поняття ізоморфізму та гомоморфізму моделі за змістом протилежні один одному.

21. В чому полягає принципова різниця між оптимальним керуванням та оптимальним проектуванням?

Відповіді.

1. Принципової різниці між цими поняттями не має. 2. У випадку оптимального керування здійснюють керування системою, а у випадку оптимального проектування систему раціонально конструюють. 3. Оптимальне керування реалізують в динамічних системах, а оптимальне проектування застосовують для статичних систем. 4. У випадку оптимального проектування вибрані значення змінних (параметри проектування) величин є фіксованими протягом всього «життя» системи, а у випадку оптимального керування за зворотнім зв'язком значення змінних величин перебудовуються під час функціонування системи.

22. Що розуміють під поняттям – «Параметрична оптимізація»?

Відповіді.

1. Це оптимізація певних параметрів системи. 2. Параметрична оптимізація – це формалізований ітераційний процес віднаходження таких входних параметрів системи (механічної, гідравлічної тощо), за яких її входні параметри (якісні показники) набувають, в певному сенсі, найкращих значень. 3. Параметрична оптимізація – це раціоналізація параметрів різних інженерних об'єктів на предмет їх відповідності технічним вимогам. 4. Це знаходження найбільш раціональних параметрів механічної системи.

23. Що розуміють під поняттям – «Цільова функція»?

Відповіді.

1. Цільова функція – математична залежність, яка зв'язує у вигляді лінійного чи нелінійного рівняння або системи рівнянь змінні проектування (параметри оптимізації) зі сталими величинами. 2. Зазвичай, цільова функція це алгебраїчне рівняння, на яке накладені певні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей. 3. Цільова функція – це математична залежність, що містить основні параметри системи, яка оптимізується. 4. Цільова функція – це алгебраїчне рівняння, що описує якусь криву чи поверхню.

24. В чому полягає різниця між методами оптимізації нульового, першого та другого порядку?

Відповіді.

1. Особливої різниці між методами оптимізації нульового, першого та другого порядку немає. Вони приблизно рівнозначні. 2. Основна різниця між цими методами полягає в різній початковій інформації, що використовується для знаходження напрямку пошуку оптимального варіанта

конструкції виробу, технологічного процесу тощо. 3. Методи нульового порядку – це методи випадкового пошуку, а методи першого та другого порядку ґрунтуються на знаходженні екстремумів цільової функції. 4. За методом нульового порядку для знаходження оптимум цільової функції не потрібно розраховувати її похідні, а за методами першого та другого порядку потрібно вираховувати, відповідно, перші та другі похідні цільової функції.

25. Які переваги має задавання цільової функції у формі середньоквадратичної функції перед представленням цільової функції у формі максимального відхилення характеристик об'єкта оптимізації від заданих?

Відповіді.

1. Переваг у цих формах задавання цільової функції немає. 2. Цільова функція у формі середньоквадратичної функції це, зазвичай, нелінійна математична залежність, а цільова функція у формі максимального відхилення – лінійна функція, тому вона їй має певну перевагу. 3. Ці форми задавання цільової функції рівнозначні. 4. Цільова функція у формі максимального відхилення характеристик об'єкта оптимізації від заданих, як правило, має розриви в перших похідних, що утруднює використання ефективних методів оптимізації, а цільова функція у формі середньоквадратичної функції, навпаки, є диференційованою по відношенню до всіх своїх аргументів, що їй є її основною перевагою.

26. В чому полягає різниця між поняттями – «Безумовна оптимізація» та «Умовна оптимізація»?

Відповіді.

1. Безумовна оптимізація здійснюється без будь-яких попередніх умов, а для умовної оптимізації повинні задаватись якісь попередні умови. 2. Особливої різниці між цими поняттями немає. Це формальні назви окремих видів оптимізації. 3. Безумовна оптимізація – це ітераційний процес віднаходження мінімальних значень цільової функції без її обмежень у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а задача умовної оптимізації розв'язується за наявності обмежень у вигляді алгебраїчних рівнянь і нерівностей. 4. Безумовна оптимізація ґрунтується на методах лінійного програмування, а умовна – на методах нелінійного програмування.

27. На чому ґрунтується метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації (мінімізації)?

Відповіді.

1. Ідея методу внутрішньої послідовної безумовної оптимізації полягає в обмеженні значень розширеної цільової функції всередині допустимої області значень параметрів оптимізації за допомогою штрафної функції від змінних проектування, яка визначається через обмеження цільової фу-

нкції. 2. Метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації ґрунтується на знаходженні екстремумів цільової функції через її обмеження. 3. Цей метод ґрунтується на знаходженні мінімальних значень цільової функції всередині допустимої області значень параметрів оптимізації. 4. Метод внутрішньої послідовної безумовної оптимізації – це метод нелінійного програмування з використанням для розширення цільової функції, та званих, штрафних функцій.

28. В чому полягає суть зовнішнього методу безумовної оптимізації?

Відповіді.

1. Зовнішній метод безумовної оптимізації ґрунтується формулюванні розширеної цільової функції зовні допустимої області значень параметрів оптимізації. 2. Суть зовнішнього методу безумовної оптимізації полягає в тому, що мінімум цільової функції шукається зовні допустимої області значень параметрів оптимізації. 3. Основна ідея методу зовнішньої безумовної оптимізації полягає в тому, що під час створення розширеної цільової функції формулюється така штрафна функція, яка є додатною у всіх точках простору проектування зовні допустимої області значень параметрів оптимізації та дорівнює нулю всередині цієї області. 4. Штрафна функція, через яку створюється розширена цільова функція, у зовнішньому методі безумовної оптимізації є квадратичною математичною залежністю.

29. У яких випадках використовують внутрішньо – зовнішній (комбінований) метод безумовної оптимізації?

Відповіді.

1. Комбінований метод безумовної оптимізації використовують для зменшення математичних розрахунків. 2. Внутрішньо – зовнішній метод безумовної оптимізації використовують, якщо хоч одне обмеження цільової функції є рівністю або ці обмеження невизначені чи від’ємні. 3. У випадку, коли обмеження цільової функції прямують до нуля чи нескінченності, застосовують комбінований метод безумовної оптимізації. 4. Комбінований метод безумовної оптимізації використовують у випадку, коли штрафні функції, що формулюють розширену цільову функцію, задаються у вигляді квадратного багаточлена.

30. На яких математичних ідеях ґрунтується метод умовної оптимізації, що отримав назву «Метод множників Лагранжа», а також відомий ще як «Необхідна умова оптимальності Куна – Такера»?

Відповіді.

1. Метод множників Лагранжа ґрунтується на трьох математичних рівняннях, одне з яких є рівністю, друге диференціальним рівнянням першого порядку, а третє – алгебраїчний багаточлен. 2. Умова оптимальності Куна – Такера ґрунтується на математичних залежностях, записаних у вигляді матриць. 3. Метод множників Лагранжа ґрунтується на припущенні, що існують такі множники, які можуть бути більшими або рівними нулю, причому добутки цих множників на відповідні обмеження змінних проектування дорівнюють нулю. Базова математична залежність цього методу, яка називається лагранжіаном, складається із алгебраїчної суми цільової функції та добутків множників на відповідні обмеження змінних проектування, а частинні похідні лагранжіана по відповідних змінних проектування дорівнюють нулю. 4. Метод множників Лагранжа ґрунтується на системі степеневих алгебраїчних рівнянь, що включає постійні величини, змінні проектування та довільні множники, що можуть бути більшими або рівними нулю.

31. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння для однорідного диференціального рівняння другого порядку $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$ (тут $y \equiv y(t)$ – змінна функція, що залежить від часу t ; a і b постійні коефіцієнти, задані в умовах однозначності) дійсні, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Який буде загальний розв’язок диференціального рівняння?

Відповіді.

1. $y(t) = (A \cos \beta t + B \sin \beta t)e^{\alpha t}$, де A та B постійні коефіцієнти, що складаються з комбінацій коефіцієнтів a і b ; α та $i\beta$ – відповідно, реальна та уявна частини коренів λ_1 і λ_2 ; $i = \sqrt{-1}$. 2. $y(t) = (C_1 + C_2)e^{\lambda_1 t}$, де C_1 та C_2 – сталі інтегрування. 3. $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$. 4. $y(t) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

32. Розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку $\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(t)$ (тут $f(t)$ – функція, що залежить від часу t , наприклад, збуджуюча сила вимушених коливань) має вигляд $y(t) = y_1(t) + y^*(t)$, де $y_1(t)$ – розв’язок однорідного диференціального рівняння другого порядку $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$; $y^*(t)$ – частинний розв’язок вказаного неоднорідного диференціального рівняння. Від чого залежить вид частинного розв’язку $y^*(t)$?

Відповіді.

1. Вид частинного розв’язку $y^(t)$ залежить від числових значень коренів λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння для однорідного диференціального рівняння другого порядку. 2. Вид частинного розв’язку $y^*(t)$ визначається*

видом функції $f(t)$, значеннями коренів λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння та значеннями коефіцієнтів $a \neq 0$ або $a = 0$ та $b \neq 0$ чи $b = 0$. 3. Частинний розв'язок $y^*(t)$ є багаточленом $Q_m(t)$ порядку (степеня) m . 4. Частинний розв'язок визначається за формулою $y^*(t) = t^2 \cdot Q_m(t)$.

33. В якій формі можна найбільш компактно записати систему «п» диференціальних рівнянь, наприклад, другого порядку, що описують математичну модель механічної системи?

Відповіді.

1. Перетворити систему диференціальних рівнянь другого порядку в систему рівнянь вищого рівнянь, наприклад, шляхом введення нових змінних. 2. Записати систему диференціальних рівнянь другого порядку у матричній формі, попередньо привівши вихідну систему до системи диференціальних рівнянь першого порядку. 3. Записати систему диференціальних рівнянь другого порядку у формі векторного рівняння. 4. Скористатись поняттями операторів диференціювання $\nabla \dots$ (набла) та Лапласа $\nabla^2 \dots$.

34. З якою метою під час аналізу деяких математичних моделей технічних систем використовують інтегральне перетворення Лапласа $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ (тут $F(p)$ – зображення оригінала $f(t)$ якоїсь функції; p – зображення аргументу t)?

Відповіді.

1. Основна мета інтегрального перетворення Лапласа – це переведення функції дійсної змінної $f(t)$ у функцію комплексної змінної $F(p)$ для, наприклад, перетворення вихідного диференціального рівняння першого порядку в алгебраїчне, яке легше розв'язати. 2. Перетворення Лапласа використовують для більш глибокого аналізу особливостей математичних моделей. 3. Перетворення Лапласа застосовують для числового розв'язування диференціальних рівнянь високого порядку. 4. Перетворення Лапласа використовують для аналізу складних математичних моделей.

35. Які основні переваги та недоліки мають числові методи розв'язування диференціальних рівнянь перед аналітичними методами їх прямого інтегрування?

Відповіді.

1. Основною перевагою числових методів розв'язування диференціальних рівнянь перед аналітичними методами є можливість розв'язувати диференціальне рівняння (чи систему рівнянь) будь-якої складності для заданих умов однозначності, а недолік – це обмежена область чинності розв'язку, справедливого тільки для конкретних умов однозначності, тоді як аналітичний розв'язок таких обмежень немає. 2. Аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь дозволяють розв'язувати прості рівняння, що зводяться до табличних інтегралів простих функцій, а в чис-

лових методах інтегрування замінюється наближенням сумуванням. 3. Основна перевага аналітичних методів розв'язування диференціальних рівнянь – це фундаментальність розв'язку, а числових методів – числова конкретність розв'язку для заданих умов однозначності. 4. Числові методи розв'язування диференціальних рівнянь використовуються для складних і громіздких рівнянь, а аналітичні – для простих рівнянь та їх систем.

36. В чому полягає відмінність між методами Тейлора та Ейлера числового розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку типу $y' = f(x, y)$?

Відповіді.

1. Принципової відмінності між методами Тейлора та Ейлера немає. 2. За методом Тейлора заданий інтервал $[x_0, x_0 + \chi]$ незалежної змінної x , за початкової умови $y(x_0) = y_0$, розбивають на маленькі ділянки $[x_{j-1}, x_j]$ (тут $j = 1, 2, \dots, n$) і, послідовно використовуючи формулу розкладення в ряд Тейлора, знаходять числові значення функції $y(x)$. За методом Ейлера незалежну змінну x , за початкової умови $y(x_0) = y_0$, розбивають на систему відрізків з рівновіддаленими точками $[x_i + i \cdot h]$ (тут $i = 0, 1, 2, \dots, n$; h – крок між точками), а кожне наступне значення функції $y(x)$ шукається за формулою $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$. 3. За методом Ейлера інтегрування диференціального рівняння замінюють сумуванням з певним кроком маленьких значень функції $y(x)$, починаючи зі значення $y(x_0) = y_0$, а за методом Тейлора вихідне диференціальне рівняння розкладають в ряд Тейлора. 4. Відмінність між методами Тейлора та Ейлера полягає в тому, що в першому випадку сумування проміжних значень функції $y(x)$ здійснюють за спеціальною формулою Тейлора, а в другому випадку (за методом Ейлера) кожне наступне значення функції $y_{i+1}(x_{i+1})$ знаходять послідовним сумуванням попередніх значень цієї функції.

37. Які основні переваги має числовий метод Рунге – Кута для розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку типу $y' = f(x, y)$ перед числовим методом Ейлера – Коші для такого ж типу задач?

Відповіді.

1. Основними перевагами методу Рунге – Кута перед методом Ейлера – Коші є можливість здійснювати числовий розв'язок диференціального рівняння зі змінним кроком між точками розбиття заданого інтервалу аргументу x та більш висока точність розрахунку, обумовлена більш точною формулою для визначення приросту функції Δy_i . 2. Принципових переваг методів Рунге – Кута та Ейлера – Коші один перед одним немає. 3. Недоліком методу Ейлера – Коші відносно методу Рунге – Кута є більш тривалий процес розрахунку та менша точність. 4. Основним недоліком методу Ейлера – Коші порівняно з методом Рунге – Кута є недоскона-

лість ітераційного процесу яка, у випадку відсутності збіжності значень розрахункових величин y_i і y_{i+1} в десяткових знаках, визиває необхідність змінити крок розбиття аргументу x та почати ітераційний процес спочатку.

38. Яка особливість числового методу Адамса – Крилова для розв’язування диференціальних рівнянь обумовлює його високу точність?

Відповіді.

1. Висока точність розв’язування диференціальних рівнянь методом Адамса – Крилова порівняно з методами Тейлора, Ейлера – Коші та Рунге – Кута, обумовлена більш точною екстракційною формулою для послідовного розрахунку значень функції $y(x)$ ($y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}$), в яку (формулу) входять похідні y'_i, y'_{i-1}, y'_{i-2} та y'_{i-3} , розраховані за інтерполяційною формулою Ньютона з точністю до четвертого знаку після коми. 2. Більш висока точність числового методу Адамса – Крилова порівняно з іншими методами досягається точним розрахунком початкового відрізка $[y_0, y_1, y_2, y_3]$, знайденого будь-яким іншим числовим методом. 3. Метод Адамса – Крилова для чисельного розв’язування диференціальних рівнянь має більш високу точність порівняно з методами Тейлора, Ейлера – Коші та Рунге – Кута тому, що він базується на цих методах із врахуванням їх недоліків. 4. Висока точність методу Адамса – Крилова порівняно з іншими числовими методами розв’язування диференціальних рівнянь обумовлена більш тривалим і деталізованим ітераційним процесом.

39. Яка особливість обумовлює практичність і високу задану точність числового методу Мілна для розв’язування диференціальних рівнянь?

Відповіді.

1. Метод Мілна має ту особливість, яка обумовлює його практичність і високу задану точність, що, після розрахунку будь-яким іншим числовим методом початкового відрізка $[y_0, y_1, y_2, y_3]$, наступні значення функції $y(x)$ розраховуються за точними ітераційними формулами та визначається абсолютна похибка двох сусідніх значень, яка порівнюється із заданою межовою похибкою. Якщо розрахована похибка менше заданої, то переходять до розрахунку наступного значення функції, а якщо навпаки, то зменшують крок розбиття аргументу x , перераховують початковий відрізок і повторюють процес розрахунку. 2. Точність і практичність методу Мілна для числового розв’язування диференціальних рівнянь реалізується за рахунок точних ітераційних формул, в яких використовуються похідні попередньо розрахованих значень функції $y(x)$. 3. Задана точність методу Мілна забезпечується періодичним розрахунком абсолютних похибок знайдених значень функції $y(x)$ та порівнянням цих похибок із заданими їх межовими значеннями. 4. Метод Мілна для числового розв’язування дифе-

ренціальних рівнянь порівняно з іншими числовими методами легше автоматизується за допомогою пакетів комп'ютерних програм, наприклад, Matlab.

40. Який метод числового розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку найбільш легко реалізується графічно?

Відповіді.

1. Метод Тейлора. 2. Метод Рунге – Кута. 3. Метод Ейлера. 4. Метод Мілна.

2.4 Рекомендовані теми теоретичної частини дисципліни, що винесені в РНПД на СРС

1. Внесок вітчизняних та зарубіжних вчених в науку про математичне моделювання механічних систем.

2. Характеристика проблеми та методів моделювання складних систем.

3. Ідентифікація як метод побудови математичних моделей.

4. Статичні та динамічні характеристики двигунів різних типів – електричних і гідравлічних.

5. Перехідні процеси в механічних системах.

6. Етапи та принципи імітаційного моделювання.

7. Лінійні простори, алгебра матриць. Норми векторів і матриць.

8. Лінійні механічні системи, основні поняття та означення. Динамічні характеристики механічної системи.

9. Періодичні функції Гріна та періодичні системи і їх режими; необхідні умови оптимальності періодичних режимів.

10. Оптимальне проектування конструкцій за обмежень по їх надійності.

11. Ітераційні числові методи розв'язування рівнянь, побудованих на умовах оптимальності проектування конструкцій. Метод Ньютона – Рафсона.

2.5 Контроль СРС

Контроль за СРС з дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» проводиться в таких формах:

– перевірка наявності в конспектах студентів інформації з тем дисципліни, винесених на самостійне опрацювання;

– включення питань з тематики матеріалу дисципліни, винесеного на самостійне опрацювання, в завдання поточних і модульних лекторських контрольних робіт та іспиту;

– індивідуальна перевірка знань і навичок студентів, набутих під час вивчення матеріалу дисципліни, винесеного на самостійне опрацювання, під час проведення практичних занять і захисту лабораторних робіт;

– вибірковий контроль знань і навичок студентів з питань тематики матеріалу дисципліни, винесеного на самостійне опрацювання, під час планових консультацій з теоретичного матеріалу дисципліни.

3 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Мета практичних занять – закріплення основних теоретичних положень дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» та набуття практичних навичок побудови динамічних і математичних моделей машин з різними типами приводів в тому числі і окремих ланок (рухомих з'єднань) цих машин.

В результаті проведення практичних занять студенти **повинні**:

1) **знати**: основні поняття фізичного (динамічного) та математичного моделювання процесів і механічних систем (машин, механізмів, приводів машин, пристроїв тощо); основи математичного апарату, який використовується для побудови та аналізу математичних моделей механічних систем і динамічних процесів, що в них відбуваються; основні види оптимізації процесів і механічних систем; основні математичні методи безумовної та умовної оптимізації як локальної так і глобальної; основи методів параметричного оптимального проектування статичних і динамічних механічних систем;

2) **вміти**: будувати структурні схеми динамічних систем, а на їх основі динамічні та математичні моделі цих систем; аналізувати фізичні процеси, що супроводжують роботу механічних систем і виділяти для конкретної системи за результатами цього аналізу найбільш суттєві; за результатами аналізу фізичних процесів, що діють в механічних системах, формувати науково-обґрунтовану структуру припущень; аналізувати та досліджувати математичні моделі механічних систем, з метою знаходження оптимальних динамічних і конструктивних параметрів цих систем; на основі аналізу математичних моделей механічних систем розробляти науково-обґрунтовану методику проектного розрахунку конкретної машини, механізму, пристрою, процесу тощо; формувати цільові функції об'єктів, параметри яких необхідно оптимізувати за заданими критеріями; розв'язувати прості інженерні чи дослідні задачі методами послідовної безумовної оптимізації (мінімізації) – внутрішнім, зовнішнім і комбінованим (внутрішньо-зовнішнім); формувати обмеження цільових функцій під час умовної оптимізації проектних і дослідних об'єктів; використовувати необхідну умову оптимальності (умова Куна – Такера) та формувати лагранжіани під час оптимізації проектних і дослідних об'єктів методом множників Лагранжа; використовувати під час оптимального проектування машинобудівних об'єктів числові методи розв'язування систем нелінійних алгебраїчних і диференціальних рівнянь, а також числові методи скінченних різниць і елементів.

3.1 Форми практичних занять

Проведення практичних занять під час викладання дисципліни «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» здійснюється за такими формами:

– розв'язування в аудиторії під керівництвом викладача задач згідно переліку тем практичних занять;

– самостійна побудова динамічних і математичних моделей простих механічних систем (простих редукторів чи іншого нескладних передач, гідро – пневмоприводів тощо) за індивідуальним завданням для кожного студента. Для цього студентам надається необхідна методична та довідкова література, а викладач працює в режимі консультацій.

Розв'язування в аудиторії під керівництвом викладача задач з курсу «Математичне моделювання та оптимізація процесів в рухомих з'єднаннях машин» може проводитись за двома способами: один студент розв'язує задачу біля класної дошки, а інші учасники практичних занять сліdkують за розв'язком задачі і конспектують його; кожен студент отримує умову індивідуальної задачі за конкретною тематикою практичного заняття і розв'язує її під контролем викладача.

3.2 Тематика практичних занять

3.2.1 Побудова динамічних моделей механічних систем (машин, механізмів, пристроїв тощо) на основі їх структурних моделей..

3.2.2 Складання та аналіз математичних моделей простих систем механічного та гідравлічного приводів на основі їх динамічних моделей.

3.2.3 Побудова та аналіз математичної моделі простого гідроімпульсного привода, гідравлічна ланка якого представлена як тіло Кельвіна – Фойхта.

3.2.4 Розв'язування аналітичним класичним способом спрощених диференціальних рівнянь, що описують переміщення рухомих мас в математичних моделях механічних систем.

3.2.5 Розв'язування прикладів і задач по застосуванню методів безумовної оптимізації.

3.2.6 Застосування методів умовної оптимізації для розв'язування інженерних задач з однією цільовою функцією.

3.2.7 Приклади практичного застосування методу множників Лагранжа в простих задачах умовної оптимізації.

3.3 Приклади оформлення розв'язку задач

Задача № 1 (тема 3.2.1)

Дано кінематичну схему (структурну схему) механічного привода з одноступінчастим зубчастим циліндричним редуктором (рис. 3.1), де I_0 , I_1 , I_2 , I_3 – відповідно, моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та

колеса редуктора і навантажуючого диска привода; $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2$ – відповідно кути повороту ротора двигуна та закручування муфти, швидкохідного і тихохідного валів редуктора. Шестерня і колесо редуктора та підшипники валів – абсолютно жорсткі тіла. Побудувати динамічну модель цього привода, вважаючи муфту безмасовим елементом, а вали безінерційними пружними елементами. k_φ, k_1, k_2 – жорсткості (крутильні) муфти та валів редуктора.

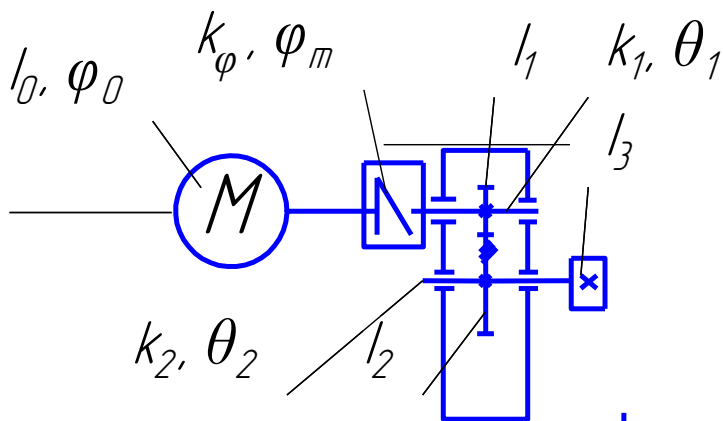


Рисунок 3.1 – Структурна схема привода

Розв'язування

Задачу №1 та інші приклади розв'язку задач за темою 3.2.1 розв'язуємо за теоретичними відомостями про динамічні моделі механічних систем, наведеними в пункті 1.2.1 лабораторної роботи № 1, описаної в цих вказівках.

Динамічну модель (рис. 3.2) за заданою кінематичною схемою механічного привода, будуємо, умовно зображаючи моменти інерції мас ротора електродвигуна I_0 , шестерні I_1 та колеса I_2 редуктора і навантажуючого диска I_3 привода прямокутниками, які зв'язані між собою безінерційними пружними елементами з коефіцієнтами крутильної жорсткості, відповідно, k_{φ_1} та k_{φ_2} , що зображають швидкохідний і тихохідний вали редуктора привода. Підшипники валів редуктора на динамічних моделях такого типу механічних систем, без вказівки їх типу, показують двома короткими паралельними лініями з прямолінійними кінцями пружних елементів, що зображають вали редуктора. Підшипники валів редуктора – безінерційні дисипативні елементи, які характеризуються коефіцієнтами опору c_{φ_1} та c_{φ_2} .

Побудована динамічна модель має три ступеня вільності – кут $q \equiv \varphi_0$ повороту ротора двигуна та кути φ_1 і φ_2 закручування валів. Якщо зубчасті колеса (вищі кінематичні пари) складаються з елементів, що не деформуються, то $\varphi_1 = f_1(q)$ і $\varphi_2 = f_2(q)$, а це означає, що динамічна модель механічного привода за заданою його кінематичною схемою та умовами задачі є одновимірною.

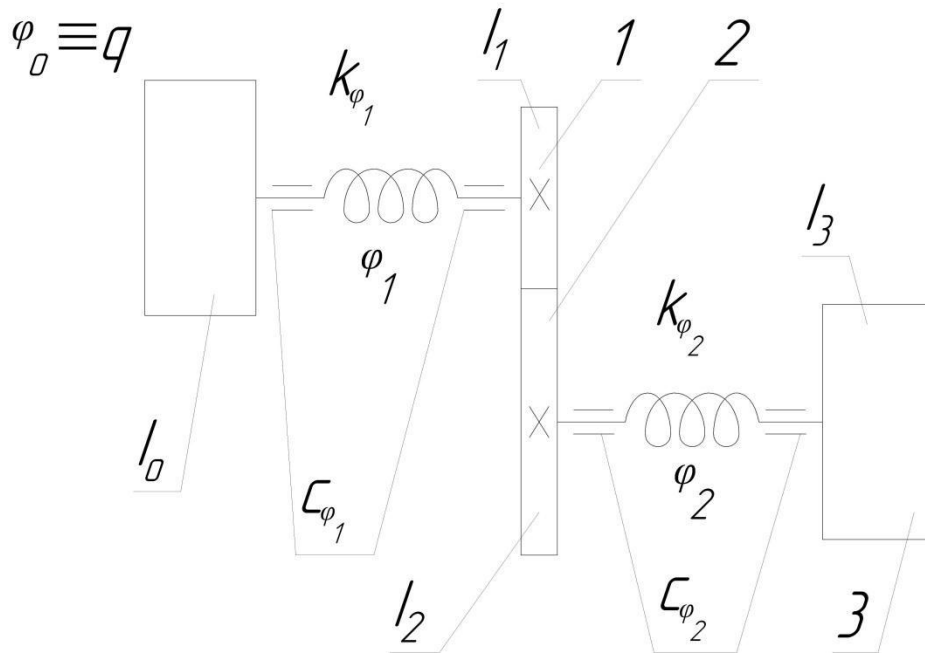


Рисунок 3.2 – Динамічна одновимірний модель механічного привода

Задача № 2 (тема 3.2.1)

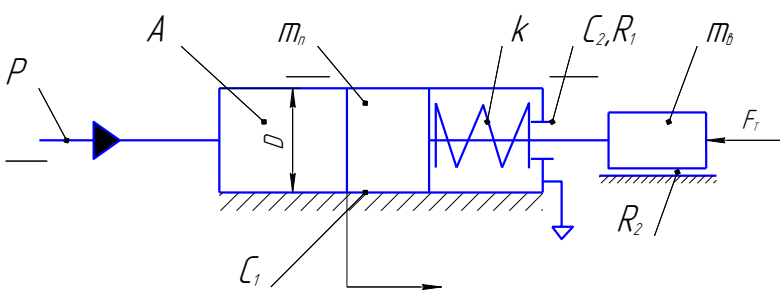


Рисунок 3.3 – Структурна (принципова) схема гідравлічного привода

Дано структурну (принципову) схему гідравлічного привода (рис. 3.3), де m_n, m_b – маса поршня гідроциліндра та виконавчої ланки привода; p – робочий тиск в напірній порожнині A привода; D – діаметр поршня гідроциліндра; k – жорсткість пружини, що навантажує поршень гідроциліндра; F_t – технологічне зусилля на штокові поршня;

R_1, R_2 – відповідно постійні сили сухого тертя на штокові поршня та направляючих виконавчої ланки; c_1, c_2 – відповідно коефіцієнт демпфірування (в'язкого тертя) в зазорах поршня і штока гідроциліндра; x – напрям руху поршня гідроциліндра. Побудувати динамічну модель привода.

Розв'язування

Зважаючи на те, що, згідно з умовою задачі, виконавча ланка та поршень гідроциліндра привода жорстко зв'язані через шток поршня, динамічну модель заданого привода можна зобразити вигляді одномасової одновимірної моделі (рис.3.4), де зведена до поршня маса привода $m = m_n + m_b$ при-

водиться в рух в напрямку координати x рушійною силою $F = p \cdot \pi \cdot D^2 / 4$, якій протидіють сили опору: технологічного F_T ; пружного $F_{np} = kx$; сухого $R = R_1 + R_2$ та в'язкого $F_f = c \cdot \dot{x} = (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}$ (тут \dot{x} – поточна швидкість руху поршня гідроциліндра привода) тертя.

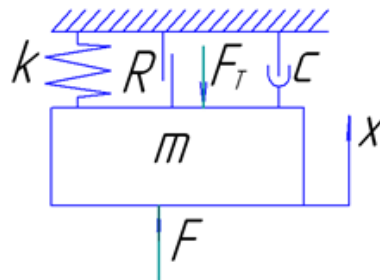
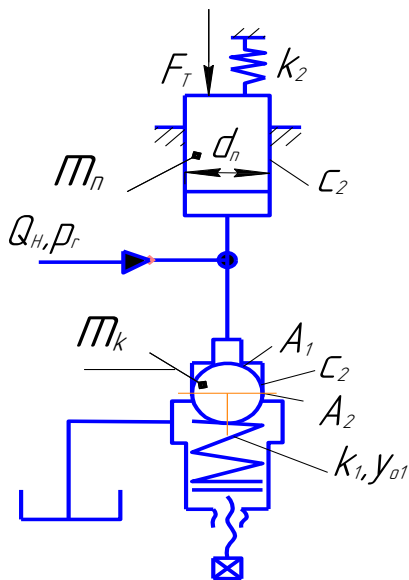


Рисунок 3.4 – Одновимірна динамічна модель гідравлічного привода

Задача № 3 (тема 3.2.1)



Дано гідроімпульсний привод (рис. 3.5) з однокаскадним генератором імпульсів тиску (ГІТ) параметричного типу, де m_k, m_n – відповідно, зведені маси запірного елемента (кульки) ГІТ і плунжера гідроциліндра привода; F_T – технологічне зусилля на плунжері; k_1, k_2 – відповідно жорсткості пружин регулятора тиску відкриття ГІТ і пружного повернення плунжера; c_1, c_2 – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних плунжера та ГІТ; d_n, A_1, A_2 – відповідно діаметр плунжера та площі поперечного перерізу кульки ГІТ; y_{o1} – попередня деформація пружини регулятора тиску відкриття ГІТ; Q_n, p_r – подача гідронасоса і поточний тиск енергоносія в напірній гідролінії привода. Побудувати динамічну модель прямого ходу рухомих мас привода.

Рисунок 3.5 – Принципова схема гідроімпульсного привода

лятора тиску відкриття ГІТ; Q_n, p_r – подача гідронасоса і поточний тиск енергоносія в напірній гідролінії привода.

Побудувати динамічну модель прямого ходу рухомих мас привода.

Розв'язування

Під час побудови динамічних моделей гідроімпульсного привода, такого типу як заданого в умові задачі, його гідравлічну ланку доцільно представити як безінерційне тіло Кельвіна – Фойхта, що складається з пружного k_0 та дисипативного c_0 безмасових елементів, яке взаємодіє (рис. 3.6) з жорсткими зведеними масами запірного елемента (кульки) ГІТ, $m_k = m_1$ та плунжера гідроциліндра привода $m_n = m_2$ через передаточні від-

ношення u_{01} і u_{02} , які визначаються квадратом відношення певного перерізу площі запірного елемента ГІТ ($u_{01} = A_1^2/A_0^2$) чи плунжера ($u_{02} = A_{\text{п}}^2/A_0^2$)

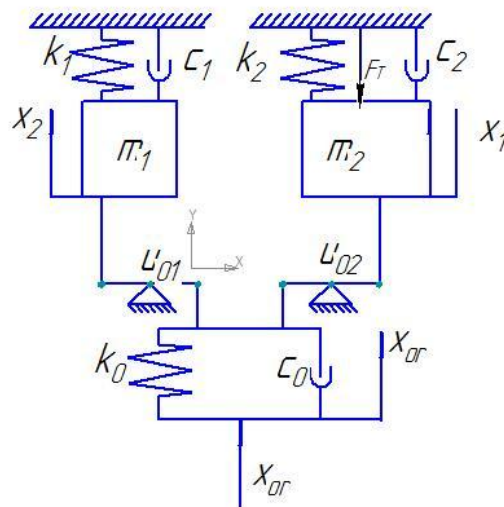


Рисунок 3.6 – Динамічна модель гідроімпульсного прямого ходу рухомих мас привода з однокаскадним ГІТ

(тут $A_{\text{п}} = \pi \cdot d_{\text{п}}^2/4$) гідроциліндра до квадрату площі A_0 перерізу усередненої напірної гідролінії [3, 6] гідроімпульсного привода. Гідрравлічна ланка протягом прямого ходу рухомих мас привода деформується в напрямку x_{or} від максимального $x_{or\max}$ до мінімального $x_{or\min}$ значень (визначаються параметрами налаштування ГІТ) зі швидкістю \dot{x}_{or} , внаслідок чого виникає пружна рушійна сила $F_p = k_0 \cdot (x_{or\max} - x_{or})$, яка приводить в рух в напрямку координат y_1 і y_2 маси m_1 та m_2 . Рушійній силі протидіють сили опору: технологічного F_T ; пружного $F_{np1} = k_1 \cdot (y_{01} + y_1)$ та $F_{np2} = k_2 \cdot (y_{02} + y_1)$; в'язкого $F_{f1} = c_1 \cdot \dot{y}_1$, $F_{f2} = c_2 \cdot \dot{y}_2$ та $F_{f0} = c_0 \cdot \dot{x}_{or}$ (тут \dot{y}_1 та \dot{y}_2 – поточні швидкості руху запірного елемента ГІТ та плунжера гідроциліндра привода) тертя. Деформація гідрравлічної ланки x_{or} та тиск p_r енергоносія в напірній гідролінії привода зв'язані між собою простою залежністю $x_{or} = p_r \cdot A_0 \cdot k_0^{-1}$ [3, 6]. Швидкість зміни та рівень x_{or} визначається величиною подачі Q_n гідронасоса привода, конструкцією та налаштуванням ГІТ.

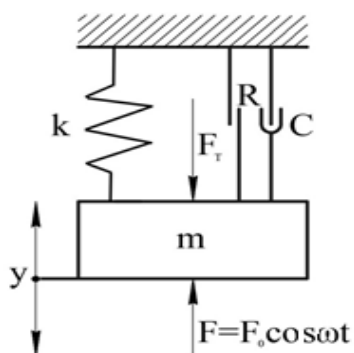


Рисунок 3.7 – Динамічна модель коливальної механічної системи

Задача № 4 (тема 3.2.2)

За динамічною моделлю коливальної механічної системи (рис. 3.7), скласти її математичну модель. На схемі динамічної моделі показано: m – маса системи; k – жорсткість пружного елемента системи; F_T – технологічне зусилля; R – сила сухого тертя під час коливань маси m ; C – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи;

$F = F_0 \cos \omega t$ – рушійна збуджуюча сила,

що приводить масу m в коливальний рух з круговою частотою ω ; t – поточний час динамічних процесів в системі; y – поточна координата положення маси m .

Розв’язування

Найпростіше для заданої динамічної моделі можна скласти її математичну модель, скориставшись принципом Д’Аламбера. Сила інерції $F_{in} = m\ddot{y}$, що виникає під час прискореного (уповільненого) руху маси m . Ця сила F_{in} діятиме проти напрямку руху маси m . Сили позиційні – пружного опору та ваги знаходяться за відомими залежностями: $F_{np} = k \cdot y$ і $F_g = m \cdot g$. Сили тертя: сухого $R = R \cdot \text{sgn}\dot{y}$; в’язкого $F_f = C\dot{y}$. За принципом рівноваги сил в статиці проектуємо всі названі сили на напрям y :

$$-m\ddot{y} - ky - R\text{sgn}\dot{y} - C\dot{y} - F_T - mg + F_0 \cos \omega t = 0$$

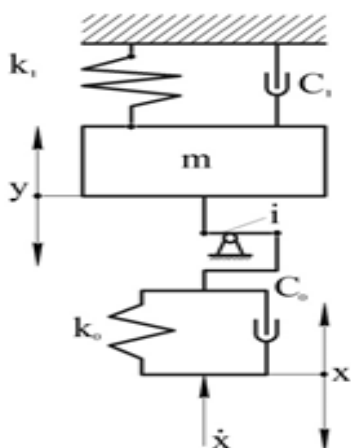
або

$$m\ddot{y} = F_0 \cos \omega t - ky - C\dot{y} - F_T - R\text{sgn}\dot{y} - mg.$$

Отримане диференціальне рівняння руху маси m є основною частиною математичної моделі заданої коливальної механічної системи. Для завершення цієї моделі, до знайденого рівняння руху маси m необхідно додати умови однозначності у вигляді початкових умов в момент часу $t = 0$, значень постійних коефіцієнтів або меж їх зміни, максимальної амплітуди та кругової частоти ω вимушених коливань маси m тощо.

Задача № 5 (тема 3.2.3)

За динамічною моделлю гідроімпульсного привода (рис. 3.8), в якому гідравлічна ланка представлена у вигляді паралельно з’єднаних пружного k_0 та дисипативного C_0 безінерційних елементів (тіло Кельвіна – Фогта), скласти математичну прямого та зворотного ходів маси m . Напрями пере-



міщення маси m (y) та деформації гідравлічної ланки (x) направлені вверх – вниз. Крім вказаних величин, на рис. 3.8 зображено: m – маса (рухома) привода; k_1 – жорсткість пружного елемента привода; C_1 – коефіцієнт в’язкого тертя під час переміщення маси m ; i_{0m} – передаточне відношення від гідравлічної ланки до маси m , яке може змінювати своє значення внаслідок спрацювання ГІТ під час прямого ($i_{0m} = i_{0mn}$) та зворотного $i_{0m} = i_{0mz}$) ходів маси m .

Рисунок 3.8 – Динамічна модель гідроімпульсного привода

Розв'язування

Згідно з рекомендаціями робіт [3, 6], задану в умові задачі динамічну модель гідроімпульсного привода слід спростити, звівши пружний k_0 і дисипативний C_0 елементи гідравлічної ланки до маси m (рис. 3.9).

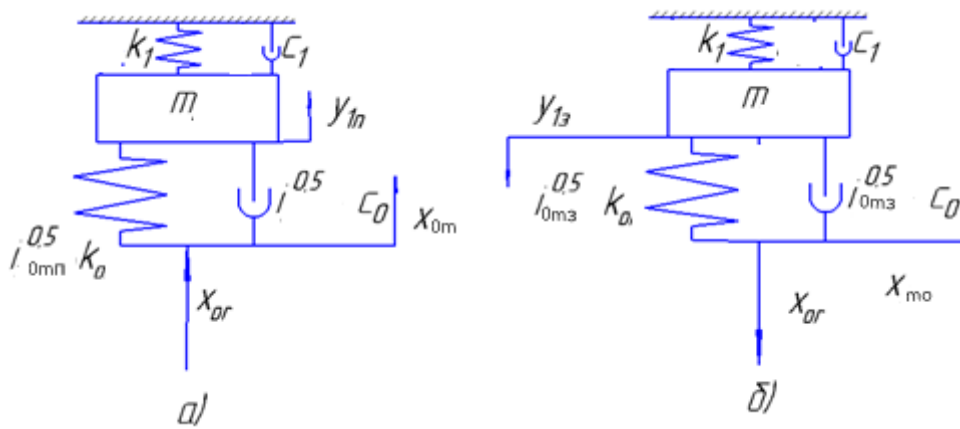


Рисунок 3.9 – Спрощені динамічні моделі заданого гідроімпульсного привода для прямого (а) та зворотного (б) ходів маси m

Використовуючи принцип Д'Аламбера, на основі цих спрощених динамічних моделей складемо рівняння руху маси m для її ходів:

прямого –

$$m \cdot \ddot{y}_n = i_{0mn} \cdot k_0 \cdot (x_{0m} - y_n) - k_1 \cdot y_n - i_{0m\pi}^{0,5} \cdot C_0 (\dot{x}_{0m} - \dot{y}_n) - C_1 \cdot \dot{y}_n;$$

зворотного –

$$m \cdot \ddot{y}_z = k_1 \cdot (y_{max} - y_z) - i_{0mz} \cdot k_0 \cdot (x_{m0} - y_z) - i_{0mz}^{0,5} \cdot C_0 (\dot{x}_{m0} - \dot{y}_z) - C_1 \cdot \dot{y}_z,$$

де $x_{0m} = x_{0rn} \cdot i_{0m\pi}^{0,5}$ для $0 \leq y_n \leq y_{max}$ та $x_{m0} = x_{0rz} \cdot i_{0mz}^{0,5}$ для $0 \leq y_z \leq y_{zmax}$ та – деформації гідравлічної ланки, зведені, відповідно, до маси m підчас прямого та зворотного її ходів; $\dot{y}_n, \dot{y}_z, \ddot{y}_n, \ddot{y}_z$ – відповідно, поточні швидкості та прискорення маси m для прямого та зворотного ходів; $\dot{x}_{0m} = \dot{x}_{0rn} \cdot i_{0m\pi}^{0,5}$, $\dot{x}_{m0} = \dot{x}_{0rz} \cdot i_{0mz}^{0,5}$ – поточні швидкості деформації гідравлічної ланки, зведені, відповідно, до маси m підчас прямого та зворотного її ходів; $y_{max} = y_{zmax}$ – максимальний хід маси m в прямому та зворотному напрямках; x_{0rn}, x_{0rz} – деформації гідравлічної ланки впродовж прямого та зворотного ходів маси m .

Межі змінення деформації гідравлічної ланки впродовж циклу роботи заданого гідроімпульсного привода обумовлюються параметрами ГІТ, подачею гідронасоса привода, жорсткістю гідравлічної ланки та інших пружних ланок привода. Для того щоб математична модель розглядуваного привода була завершеною до знайдених диференціальних рівнянь руху ма-

си m необхідно додати рівняння витрати енергоносія [3, 6] та умови однозначності, якими встановлюються межі змінення x_{0rn} , $x_{0rз}$, y_{max} та ін.

Задача № 6 (тема 3.2.4)

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку $dy \cdot a - (y - b) dx = 0$, де $a = 5$; $b = 10$, а змінні y та x міняються, відповідно, в інтервалах $[20, 100]$ і $[0, x_1]$, та визначити x_1 .

Розв'язування

Розділяємо змінні в заданому диференціальному рівнянні та інтегруємо його в заданих інтервалах:

$$\int [dy/(y - b)] = a^{-1} \int dx; \ln[(y_1 - b)/(y_0 - b)] = a^{-1} x_1,$$

звідки $x_1 = \ln[(y_1 - b)/(y_0 - b)] \cdot a = \ln[(100 - 10)/(20 - 10)] \cdot 5 = 14,48$.

Задача № 7 (тема 3.2.4)

Розв'язати однорідне диференціальне рівняння другого порядку $y'' + 6y' + 6 = 0$, де $y = f(t)$; за $t = 0$ $y(0) = 0$, а за $t = 2$ $y(2) = 5$.

Розв'язування

1. Складаємо для заданого диференціального рівняння характеристичне рівняння та розв'язуємо його:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 6 = 0; \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6}, \text{ звідки } \lambda_1 = -4,43; \lambda_2 = -1,27.$$

2. Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то загальний розв'язок заданого диференціального рівняння буде мати вигляд [6]

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

3. Підставляючи в цей розв'язок початкові умови, знайдемо сталі інтегрування $C_1 = 0,39$ та $C_2 = -0,39$ і загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(t) = 0,39 e^{-1,27t} (1 - e^{-6t}).$$

Задача № 8 (тема 3.2.4)

Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку $y'' + \omega_0^2 y = A_0 \cdot \cos \omega t$, що описує вимушені коливання механічної системи без тертя. У наведеному рівнянні: $y = f(t)$, де t – час протікання коливань, с; $\omega_0 = 300 \text{ c}^{-1}$ – частота вільних коливань механічної системи; $A_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ –

максимальна (рівноважна) амплітуда коливань в до резонансній зоні механічної системи.

Розв'язування

1. Для такого типу диференціального рівняння другого порядку, що описує стаціонарні вимушені коливання, розв'язок має вигляд [17]

$$y = H \cdot \cos \omega t, \quad (\text{a})$$

де $H = A_0 \cdot [1/(1 - \omega^2/\omega_0^2)] = 2 \cdot 10^{-3} \cdot [1/(1 - 1,11 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2)]$ – формула для розрахунку амплітуди вимушених коливань, отримана підстановкою розв'язку (а) у задане диференціальне рівняння.

Задача № 9 (тема 3.2.4)

Методом скінченних різниць розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності $\partial t/\partial \tau = a \partial^2 t/\partial x^2$, що описує лінійний нестационарний процес зміни температури t в струні (діаметром струни знехтувати) в часі τ та по її довжині x . a – коефіцієнт температуропровідності матеріалу струни. Прийняти критерій Фур'є $F_{ox} = a \Delta \tau/h^2 = 0,5$ (тут $\Delta \tau$, h – відповідно інтервали розбивання часу τ процесу та довжини x струни). Розв'язок знайти в загальному вигляді для температури вузлової точки $t_{i, k+1}$, якщо відомі температури сусідніх вузлових точок струни $t_{i+1, k}$ та $t_{i-1, k}$ в попередній момент часу k .

Розв'язування

Розділимо струну на маленькі відрізки довжиною h та пронумеруємо їх індексами $i-2, k, i-1, k, i, k, i+1, k \dots, i+n, k$ (тут i – центральна вузлова точка). Згідно з правилами методу скінченних різниць [5], першу похідну $\partial t/\partial x$ поблизу точки i в момент часу k можна замінити одним з двох наближених виразів:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \begin{cases} \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_+ = \frac{t_{i+1, k} - t_{i, k}}{h}; \\ \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_- = \frac{t_{i, k} - t_{i-1, k}}{h}, \end{cases} \quad (\text{a})$$

де $(\Delta t/h)_+$ та $(\Delta t/h)_-$ – прийнято називати різницевиими відношеннями «вперед» (+) та «назад» (-).

Другу похідну $\partial^2 t/\partial x^2$ можна подати через різницю відношень «вперед» та «назад», віднесену до h :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\Delta t}{h} \right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{h} \right)_- \right] = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k} - 2t_{i,k}}{h^2}. \quad (\text{б})$$

Оскільки часова вісь (стріла часу) має один напрямок від теперішнього до майбутнього, то похідну $\partial t / \partial \tau$ можна описати тільки одним різницеvim співвідношенням:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta \tau}. \quad (\text{в})$$

Підставляючи (б) та (в) у задане диференціальне рівняння теплопровідності, після нескладних перетворень отримаємо вираз для розрахунку температури точки i в момент часу $k+1$:

$$t_{i,k+1} = \frac{a\Delta\tau}{h^2} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + \left(1 - \frac{2a\Delta\tau}{h^2} \right) t_{i,k} = F_{ox} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + (1 - 2F_{ox}) t_{i,k}, \quad (\text{г})$$

де $F_{ox} = a \Delta\tau / h^2$ критерій Фур'є. Рівняння (г) є диференціальним рівнянням теплопровідності в скінченно різницеvій формі. За $F_{ox} = 0,5$

$$t_{i,k+1} = 0,5 (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}). \quad (\text{д})$$

Задача № 10 (тема 3.2.5)

Необхідно оптимізувати методом внутрішньої послідовної мінімізації цільову функцію $\psi_0(b_1, b_2) = b_1 + b_2$ за такими її обмеженнями: $\psi_1(b_1, b_2) = -b_1 \leq 0$; $\psi_2(b_1, b_2) = -b_2 \leq 0$.

Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [14] визначимо розширену цільову функцію

$$U(b, r) = b_1 + b_2 + r (b_1^{-1} + b_2^{-1}). \quad (\text{а})$$

Для віднаходження мінімуму $U(b, r)$ припустимо, що:

$$\partial U / \partial b_1 = 0 = 1 - r \cdot b_1^{-2}; \quad \partial U / \partial b_2 = 0 = 1 - r \cdot b_2^{-2}. \quad (\text{б})$$

З виразів (б), знайдемо:

$$b_1 = r^{0,5}; \quad b_2 = r^{0,5}. \quad (\text{в})$$

Якщо $r \rightarrow 0$, то $b_1 \rightarrow 0$ та $b_2 \rightarrow 0$ і розв'язком задачі буде значення цільової функції $U(b, r)$ в т. з координатами $(b_1, b_2) = 0$.

Задача № 11 (тема 3.2.5)

Знайти за зовнішнім методом безумовної оптимізації мінімум цільової функції $\psi_0(b_1, b_2) = b_1^2 + 2 \cdot b_2^2$ за такого її обмеження $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1 = 0$.

Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [14] визначимо розширену цільову функцію для $j = 1$:

$$T(b, t) = b_1^2 + b_2^2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (\text{а})$$

Припустимо, що:

$$\partial T / b_1 = 2 b_1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0; \quad (\text{б})$$

$$\partial T / b_2 = 4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (\text{в})$$

Щоб виключити параметр t , віднімемо від (в) (б) і знайдемо

$$4 \cdot b_2 - 2 \cdot b_1 = 0, \quad (\text{г})$$

звідки
$$b_1 = 2 \cdot b_2. \quad (\text{д})$$

Підставимо (д) в (в) та отримаємо:

$$4 b_2 + 2 \cdot t \cdot (3 b_2 - 1) = 0, \quad (\text{е})$$

звідки
$$b_2 = t / (2 + 3 \cdot t) = 1 / (2 / t + 3). \quad (\text{ж})$$

Визначимо границі зміни параметрів « b_2 » і « b_1 » цільової функції $\psi_0(b)$:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 / (2 / t + 3)] = 1 / 3$; $\lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} b_2 = 2 / 3$.

Цільова функція $\psi_0(b)$ матиме мінімум (оптимум) в т. з координатами $(b_1, b_2) = (2 / 3, 1 / 3)$.

Задача № 12 (тема 3.2.5)

Знайти комбінованим внутрішньо – зовнішнім методом послідовної безумовної оптимізації мінімум цільової функції $\psi_0(b_1, b_2) = -b_1 + b_2$ за такими її обмеженнями: $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1$; $\psi_2(b_1, b_2) = \ln b_2 \leq 0$.

Розв'язування

За формулою, наведеною в роботі [14] визначимо розширену цільову функцію для $j = 1$ та $i = 2$:

$$V(b, r, t) = -b_1 + b_2 + r / \ln b_2 + t \cdot (b_1 + b_2 - 1)^2. \quad (\text{а})$$

Припустимо, що:

$$\partial V / \partial b_1 = -1 + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0; \quad (\text{б})$$

$$\partial V / \partial b_2 = 1 - [r / (b_2 \ln^2 \cdot b_2)] + 2 \cdot t \cdot (b_1 + b_2 - 1) = 0. \quad (\text{в})$$

Віднімемо від (в) (б) і отримаємо:

$$2 - [r / (b_2 \ln^2 \cdot b_2)] = 0. \quad (\text{г})$$

Розв'язавши рівняння (г) відносно b_2 , знайдемо

$$b_2 = \exp [(r / (2 \cdot b_2))^{0.5}]. \quad (\text{д})$$

Визначимо границю функції (д):

$$\lim_{r \rightarrow 0} b_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \{ \exp [(r / (2b_2))^{0.5}] \} = e^0 = 1, \quad (\text{е})$$

звідки $\lim_{r \rightarrow 0} b_2 \rightarrow 1$.

У випадку $t \rightarrow \infty$ необхідно, щоб обмеження $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 1$ прямувало до нуля, інакше похідні (б) та (в) не можуть бути рівними нулю. Звідси випливає, що границя $\lim_{t \rightarrow \infty} b_1 = 0$. Зважаючи на границі параметрів b_1 і b_2 цільової функції, точкою мінімуму $\psi_0(b)$ буде інтервал $[b_1, b_2] = [0, 1]$.

Задача № 13 (тема 3.2.6)

Методом умовної оптимізації мінімізувати цільову функцію $\psi_0(b) = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2$ за таких її обмежень: $\psi_1 \equiv -b_1 \leq 0$; $\psi_2 \equiv -b_2 \leq 0$; $\psi_3 \equiv b_1 + b_2 - 4 \leq 0$.

Розв'язування

За методом послідовної безумовної оптимізації, знайдемо:

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_1 = 2 \cdot (b_1 - 1) = 0; \quad (\text{а})$$

$$\partial \psi_0(b) / \partial b_2 = 2 \cdot (b_2 - 1) = 0, \quad (\text{б})$$

звідки
$$b_1 = b_2 = 1, \quad (\text{в})$$

що означає точку мінімуму цільової функції з координатами \bar{b} (1, 1), яка лежить всередині області «В».

За методом умовної оптимізації:

$$-b_1 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0; \quad (\Gamma)$$

$$-b_2 = (b_1 - 1)^2 + (b_2 - 1)^2 \leq 0, \quad (\Delta)$$

звідки: $-b_1 + b_2 = 0; b_1 = b_2; 2 \cdot b_1 - 4 \leq 0; b_1 \leq 2; b_2 \leq 2$.

Але точка \bar{b} (2, 2) не є мінімумом, оскільки $1 < 2$, а точка \bar{b} (1, 1) задовольняє обмеженням: $-b_1 = -1 < 0; -b_2 = -1 < 0; 1 + 1 - 4 = -2 < 0$.

Задача № 14 (тема 3.2.7)

Необхідно оптимізувати геометричні розміри швидкохідного вала з встановленим на ньому важким диском (маховиком, шківом, зубчастим колесом тощо) за критерієм мінімальної маси m вала. З метою спрощення припустимо, що вал складається з трьох ступенів, крайніх з діаметром d_1 , а середній, на якому встановлено важкий диск, має діаметр d_2 , причому $d_2 > d_1$. Довжина кожного ступеня l , а повна довжина вала $3l$.

Розв'язування

Цю задачу доцільно розв'язувати за допомогою, так званої *необхідної умови оптимальності Куна – Такера*, яка в технічній літературі [14] відома ще під назвою – «метод множників Лагранжа» (також див. лабораторну роботу № 3 цих вказівок).

Згідно з описанням конструкції вала, за заданої довжини його ступенів l , в цьому прикладі буде дві змінних проектування $b_1 = d_1$ та $b_2 = d_2$. За цільову функцію $\psi_0(b)$ візьмемо залежність маси вала від змінних d_1 і d_2 :

$$\psi_0(b) \equiv m = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2), \quad (\alpha)$$

де ρ – густина матеріалу вала.

Сформулюємо систему обмежень на змінні проектування за знаком і функціональні. Обмеження за знаком очевидні:

$$\psi_1 \equiv d_1 \geq 0; \quad \psi_2 \equiv d_2 \geq 0. \quad (\beta)$$

Дорезонансний режим роботи вала визначається умовою

$$\omega_0 - \omega \geq 0, \quad (\gamma)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m} = (\lambda \cdot m)^{-0,5}$ – колова частота вільних (власних) коливань вала; $k = \lambda^{-1}$ – відповідно, жорсткість і податливість вала; ω – кутова швид-

кість (колова частота) вала. Податливість вала, для описаної його конструкції, можна розрахувати за формулою [16]

$$\lambda = \{64 \cdot l^3 \cdot [(1 / d_1^4) + (19 / (8 \cdot d_2^4))]\} / (6 \cdot \pi \cdot E), \quad (\Gamma)$$

де E – модуль пружності матеріалу вала.

Підставляючи (Г) в (В) і замінюючи для спрощення нерівність рівністю, знайдемо:

$$k_3 \cdot \omega_0 - \omega = 0,7 / \sqrt{(\{64 \cdot l^3 \cdot [(1 / d_1^4) + (2,38 / (d_2^4))]\} / (6 \cdot \pi \cdot E))} = 0, \quad (\Delta)$$

де $k_3 \leq 0$ – коефіцієнт, що перетворює нерівність (19) в рівність.

Виконавши нескладні алгебраїчні перетворення виразу (Д), отримаємо функціональне обмеження змінних проектування у вигляді:

$$\psi_3 = [(1 / d_1^4) + (2,38 / (d_2^4))] - C = 0, \quad (\epsilon)$$

де $C = (0,7 / \omega \cdot \sqrt{((64 \cdot l^3) / (6 \cdot \pi \cdot E))})^2 = (0,14 \cdot E) / (\omega^2 \cdot l^3) = const.$

Використовуючи формулу (1.32) з теоретичних відомостей до лабораторної № 3, знайдемо лагранжیان

$$L = \psi_0(b) + \sum_{i=1}^3 (v_i \psi_i) = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2) + v_1 \cdot \psi_1 + v_2 \cdot \psi_2 + \\ + \psi_3 \cdot \{[(1 / d_1^4) + (2,38 / (d_2^4))] - C\}. \quad (\text{ж})$$

Згідно з (1.30) (див. лабораторну роботу № 3 цих вказівок), повинна виконуватись рівність $v_1 \cdot \psi_1 = v_2 \cdot \psi_2 = v_3 \cdot \psi_3 = 0$. Варіант $\psi_1 = \psi_2 = 0$ немає практичного (фізичного) смислу, звідки випливає, що $v_1 = v_2 = 0$, а $v_3 > 0$ за $\psi_3 = 0$. З врахуванням зроблених зауважень, вираз (ж) набуде вигляду

$$L = 0,75 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot (2 \cdot d_1^2 + d_2^2) + v_3 \cdot \{[(1 / d_1^4) + (2,38 / (d_2^4))] - C\}. \quad (\text{и})$$

Знайдемо частинні похідні з умовою (1.31) (див. лабораторну роботу № 3 цих вказівок):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial L / \partial \psi_1 \equiv \partial L / \partial d_1 = 3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_1 - 4 \cdot v_3 \cdot d_1^{-5} = 3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_1^6 - 4 \cdot v_3 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_2 \equiv \partial L / \partial d_2 = 1,50 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_2 - 9,52 \cdot v_3 \cdot d_2^{-5} = 1,50 \cdot \pi \cdot \rho \cdot l \cdot d_2^6 - \\ - 9,52 \cdot v_3 = 0; \\ \partial L / \partial \psi_3 \equiv \partial L / \partial v_3 = d_1^{-4} + 2,38 \cdot d_2^{-4} - C = 0. \end{array} \right. \quad (\text{к})$$

Розв'язуючи систему рівнянь (к), знайдемо формули для розрахунку діаметрів ступенів вала за яких, за заданої довжини l кожного ступеня, він матиме мінімальну масу m :

$$d_1 = 1,16 \cdot C^{0,25}; d_2 = 1,51 \cdot C^{0,25}. \quad (\text{л})$$

Згідно з (е) постійна « C » в міжнародній системі одиниць SI має розмірність $\text{кг}/\text{м}^4$, що обумовлює розмірність $\text{кг}^{0,25}$ числових коефіцієнтів у формулах (л). Постійну « C », яка визначає оптимальні діаметри ступенів вала, для зручності аналізу впливу її складових на мінімізацію маси вала доцільно представити у формі:

$$C^{0,25} = 1,64 \cdot \omega^{0,5} \cdot (l^3 / E)^{0,25} = 1,64 \cdot \omega^{0,5} \cdot (C_1)^{0,25}, \quad (\text{м})$$

де $C_1 = l^3 / E = \text{const}$ за заданих довжини l кожного ступеня вала та марки його матеріалу.

Якщо порівнювати вали з одного типу матеріалів (в машинобудуванні це, зазвичай, різні марки конструкційних сталей), то згідно з (л), основний вплив на розміри ступенів вала, а значить і на його масу, має кутова швидкість обертання вала ω . Чим вище кутова швидкість ω , тим менші повинні бути діаметри ступенів вала. Оптимальне співвідношення діаметрів $d_1 / d_2 = 0,77$.

3.4 Типові умови задач для практичних занять і СРС

№ 1

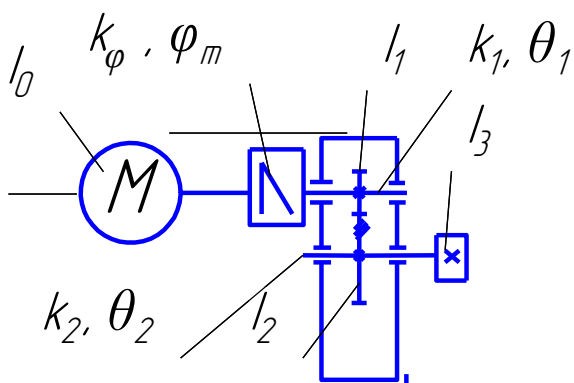


Рисунок 1

Дано кінематичну схему (структурну схему) механічного привода з одноступінчастим зубчастим циліндричним редуктором (рис.1), де I_0, I_1, I_2, I_3 – відповідно, моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса редуктора; навантажуючого диска привода; $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2$ – відповідно кути повороту ротора двигуна та закручування муфти, швидкохідного і тихохідного валів редуктора. Шестерня і колесо редуктора та

підшипники валів – абсолютно жорсткі тіла. Побудувати динамічну модель цього привода, вважаючи муфту безмасовим елементом, а вали безінерційними пружними елементами. k_φ, k_1, k_2 – жорсткості (крутильні) муфти та валів редуктора.

№ 2

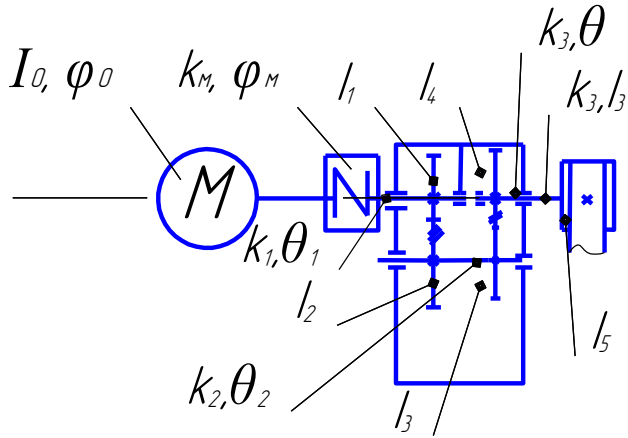


Рисунок 1

Дано структурну схему (рис. 1) механічного привода, де I_0, I_1, I_2, I_3, I_5 – відповідно, моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса швидкохідного і тихохідного ступенів редуктора та приводного барабана привода; k_m, k_1, k_2, k_3 – відповідно крутильні жорсткості муфти та валів редуктора; $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ – відповідно кути повороту ротора електродвигуна та закручування муфти і валів редуктора.

Зубчасті колеса редуктора та підшипники валів вважати абсолютно жорсткими. Моментом інерції маси муфти знехтувати. Побудувати динамічну модель цього привода.

№ 3

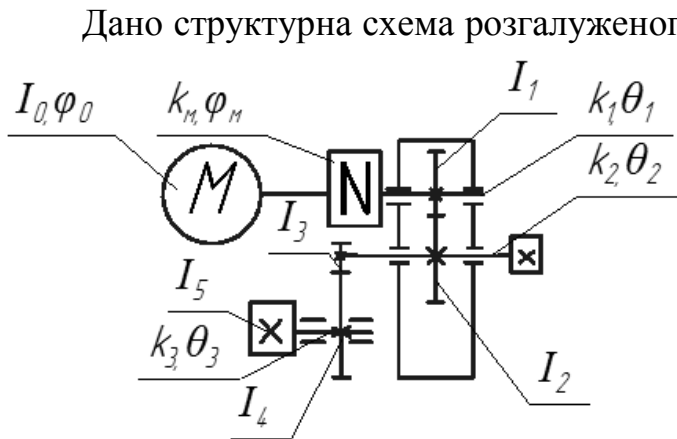


Рисунок 1

Дано структурна схема розгалуженого механічного привода (рис.1), де $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ – відповідно, моменти інерції мас ротора електродвигуна, шестерні та колеса редуктора, маси шківів і шестерні відкритої передачі, колеса відкритої передачі та шківів, встановлених на валу цього колеса; k_m, k_1, k_2, k_3 – відповідно крутильні жорсткості муфти та валів редуктора та вала колеса відкритої передачі; $\varphi_0, \varphi_m, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ – відповідно кути повороту ротора електродвигуна та закручування муфти і валів передач. Зубчасті колеса передач та підшипники валів вважати абсолютно жорсткими. Моментом інерції маси муфти знехтувати. Побудувати динамічну модель цього привода.

Зубчасті колеса передач та підшипники валів вважати абсолютно жорсткими. Моментом інерції маси муфти знехтувати. Побудувати динамічну модель цього привода.

№ 4

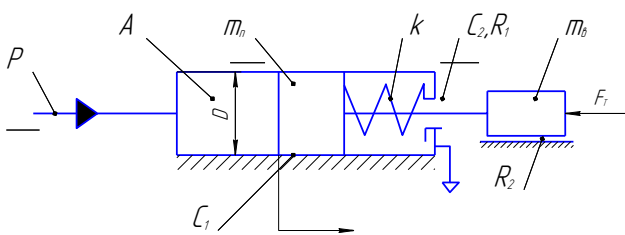
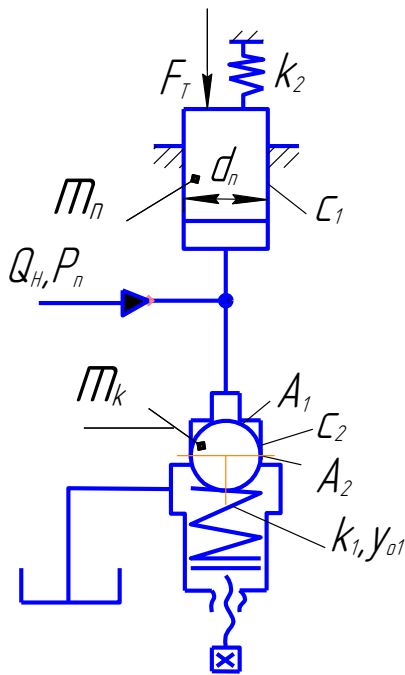


Рисунок 1

Дано структурну (принципову) схему (рис. 1) гідравлічного привода, де m_n, m_b – маса поршня гідроциліндра та виконавчої ланки привода; p – робочий тиск в

напірній порожнині A привода; D – діаметр поршня гідроциліндра; k – жорсткість пружини, що навантажує поршень гідроциліндра; F_T – технологічне зусилля на штокові поршня; R_1, R_2 – відповідно постійні сили сухого тертя на штокові поршня та напрямних виконавчої ланки; c_1, c_2 – відповідно коефіцієнт демпфірування (в'язкого тертя) в зазорах поршня і штока гідроциліндра; x – напрям руху поршня гідроциліндра. Побудувати динамічну модель привода.

№ 5



Дано гідроімпульсний привод (рис. 1) з однокаскадним генератором імпульсів тиску (ГІТ) параметричного типу, де m_k, m_n – відповідно, зведені маси запірного елемента (кульки) ГІТ та плунжера гідроциліндра привода; F_T – технологічне зусилля на плунжері; k_1, k_2 – відповідно жорсткості пружин регулятора тиску відкриття ГІТ та пружного повернення плунжера; c_1, c_2 – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних плунжера та ГІТ. d_n, A_1, A_2 – відповідно діаметр плунжера та площі поперечного перерізу кульки ГІТ; y_{01} – попередня деформація пружини регулятора тиску відкриття ГІТ; Q_H, p_r – подача гідронасоса та поточний тиск енергоносія в напірній гідролінії привода. Побудувати динамічну модель привода.

Рисунок 1

№ 6

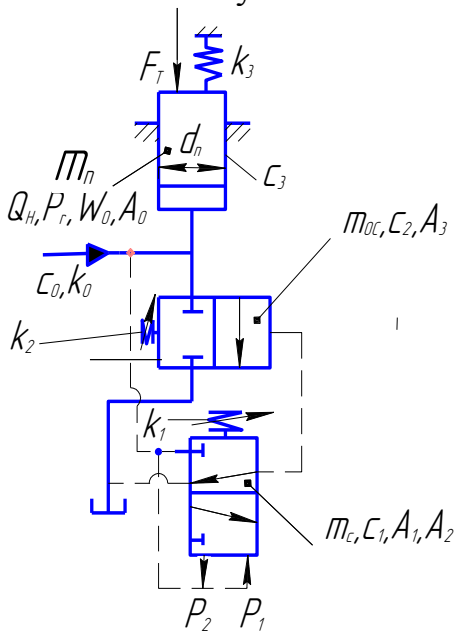


Рисунок 1

Дано гідроімпульсний привод (рис. 1) з двокаскадним генератором імпульсів тиску (ГІТ) параметричного типу з такими параметрами: m_c, m_{oc}, m_n – відповідно, зведені маси сервопривода та основного каскаду ГІТ і плунжера гідроциліндра привода; Q_H, W_0, p_r – подача гідронасоса, початковий об'єм напірної порожнини привода, поточне значення тиску в напірній порожнині; F_T – технологічне зусилля на плунжері; c_1, c_2, c_3 – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних, відповідно запірних елементах сервопривода та основного каскаду ГІТ і плунжера гідроциліндра; d_n, A_1, A_2, A_3 – відповідно діаметр плунжера та площі попе-

речного перерізу запірних елементів сервопривода та основного каскаду ГТ; k_1, k_2, k_3 – відповідно жорсткості пружин повернення запірних елементів сервопривода та основного каскаду ГТ і плунжера. Представивши гідравлічну ланку привода у вигляді безінерційних паралельно з'єднаних пружного та дисипативного елементів (тіло Кельвіна-Фойхта) з жорсткістю k_0 і коефіцієнт в'язкого тертя c_0 , визначених відносно гідролінії A_0 , побудувати динамічну модель привода.

№ 7

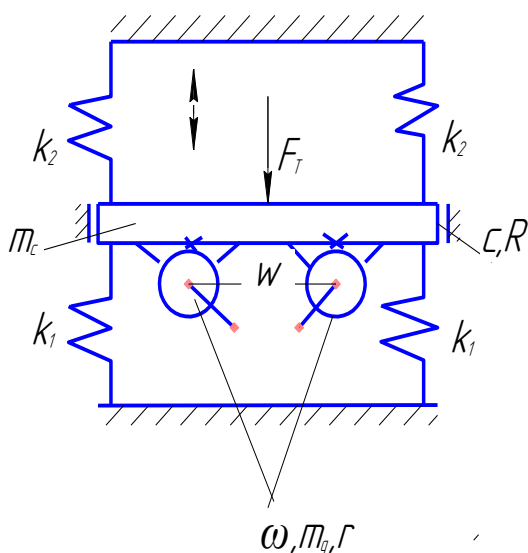


Рисунок 1

Дано структурну схему (рис. 1) вібраційної машини з дебалансним приводом і такими параметрами : m_g – маса дебалансів; $\omega = \text{const}$ – кутова швидкість обертання дебалансів; r – ексцентриситет дебалансів; m_c – маса вібростола; k_1, k_2 – жорсткості пружних елементів відростала; F_T – технологічне зусилля на вібростолі; c, R – відповідно коефіцієнт в'язкого тертя та середня сила сухого тертя в напрямних вібростола. Побудувати динамічну модель цього привода.

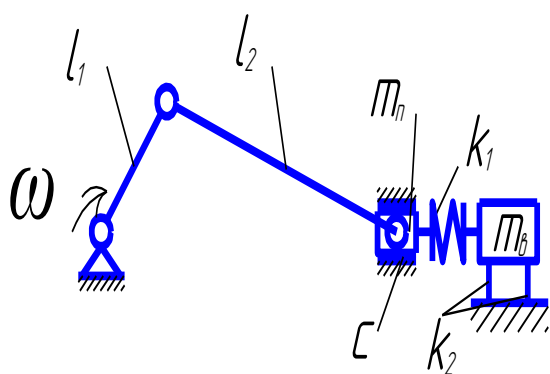


Рисунок 1

№8

Дано структурну схему (рис. 1) вібромашини з кінематичним збудженням і такими параметрами : $\omega = \text{const}$ – кутова швидкість кривошипа; l_1, l_2 – відповідно довжини кривошипа та шатуна; m_n, m_e – зведені маси повзуна та виконавчої ланки вібромашини; k_1, k_2 – жорсткості пружних елементів вібромашини; c – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних повзуна.

Тертям в кінематичних пар кривошипа і шатуна знехтувати. Побудувати динамічну модель цієї вібромашини.

№ 9

Дано структурну схему (рис.1) вібромашини з електромагнітним віброзбуджувачем і такими параметрами: m_c – маса вібростола; k – жорсткості пружин на яких встановлено вібростіл (коливальну систему); c – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних вібростола; $F_e = f(U, I, L, a_0, R,)$ – змінна елект-

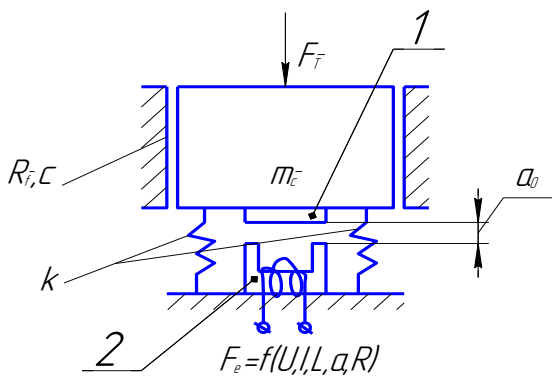


Рисунок 1

ромагнітна сила – функція сили I струму, індуктивності L обмотки електромагніту та її опору R і початкового зазору a_0 між якорем електромагніту 1 та його магнітопроводом 2; F_T – технологічне зусилля; R_f – сила сухого тертя. Побудувати динамічну модель цієї вібромашини.

№ 10

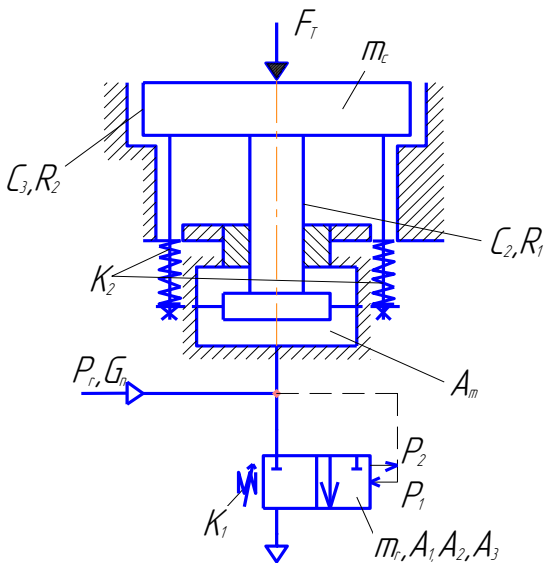


Рисунок 1

Дано структурну схему (рис. 1) вібромашини з пневмоімпульсним приводом і такими параметрами: m_c , m_r – зведені маси, відповідно, вібростола разом з мембранним пневмодвигуном і генератором імпульсів тиску повітря (ГІТ); p_r , G_n – поточний тиск і масова витрата повітря в пневмомережі; A_1 , A_2 , A_m – відповідно, площі поперечного перерізу запірника ГІТ та ефективна площа мембрани пневмодвигуна; k_1 , k_2 – відповідно жорсткості пружин регулятора тиску відкриття ГІТ та повернення вібростола; c_1 , c_2 , c_3 – коефіцієнт в'язкого тертя в напрямних запірника ГІТ, пневмодвигуна та вібростола; R_1 , R_2 – сила сухого тертя в напрямних штока пневмодвигуна та вібростола;

F_T – технологічне зусилля. Побудувати динамічну модель вібромашини.

№ 11

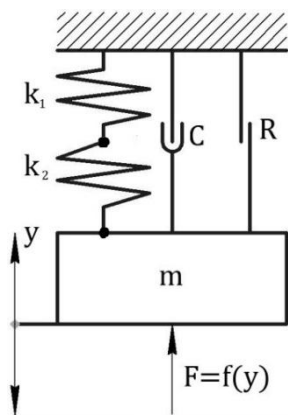


Рисунок 1

За динамічною моделлю (рис.1) механічної системи, що здійснює вимушені коливання вздовж координати y під дією сили $F = f(y)$, скласти математичну модель цієї системи. На рис.1 позначено: m – маса системи; k_1 та k_2 – жорсткості пружної ланки системи у вигляді двох, послідовно з'єднаних пружин; C коефіцієнт в'язкого тертя під час коливань маси m ; R – сила сухого тертя під час руху маси m .

№ 12

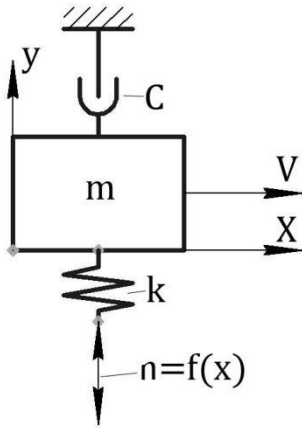


Рисунок 1

Механічна система з рухомою масою m рухається в напрямку x з постійною швидкістю $V = x/t$ і приходить в коливальний рух відносно координати y внаслідок кінематичного збудження $n = f(x)$ (наприклад, підресорена маса автомобіля на нерівній дорозі), яке передається масі m через пружину жорсткістю k . Скориставшись динамічною моделлю цієї системи (рис.1), скласти її математичну модель. C – коефіцієнт в'язкого тертя під час коливань маси m .

№ 13

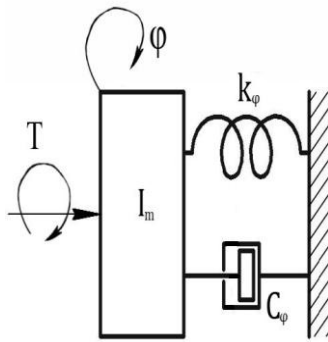


Рисунок 1

За динамічною моделлю механічної системи (рис.1), що здійснює обертальний рух, скласти математичну модель цієї системи. На рис.1 позначено: T – рушійний обертальний момент; I_m – момент інерції маси рухомої ланки системи; k_ϕ – коефіцієнт крутильної жорсткості пружної ланки системи; C_ϕ – коефіцієнт в'язкого тертя під час крутильних переміщень рухомої ланки; ϕ – кут закручування рухомої ланки.

№ 14

За динамічною моделлю гідроімпульсного привода (рис.1), в якому гідравлічна ланка представлена у вигляді паралельно з'єднаних пружного (k_0) та дисипативного (C_0) безінерційних елементів (тіло Кельвіна – Фойгта), скласти математичну модель прямого ходу маси m .

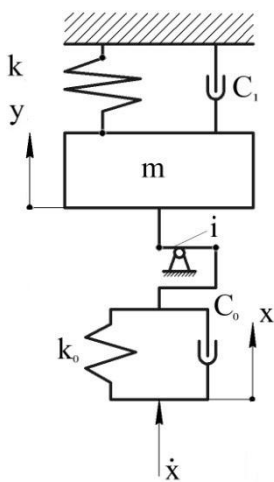


Рисунок 1

Напрями переміщення маси m (y) та деформації гідравлічної ланки (x) направлені вгору. Крім вказаних величин, на рис.1 зображено: m – маса (рухома) привода; k_1 – жорсткість пружного елемента привода; C_1 – коефіцієнт в'язкого тертя під час переміщення маси m ; i_{0m} – передаточне відношення від гідравлічної ланки до маси m , яке може змінювати своє значення внаслідок спрацювання ГТ під час прямого ($i_{0m} = i_{0mn}$) та зворотного ($i_{0m} = i_{0mz}$) ходів маси m .

№ 15

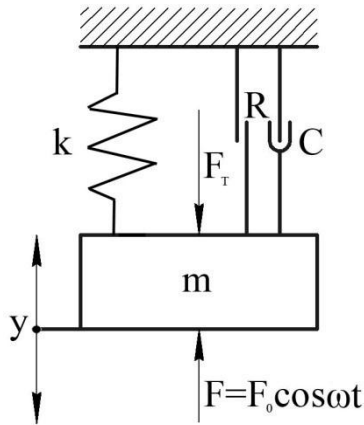


Рисунок 1

За динамічною моделлю коливальної механічної системи (рис. 1), скласти її математичну модель. На схемі динамічної моделі показано: m – маса системи; k – жорсткість пружного елемента системи; F_T – технологічне зусилля; R – сила сухого тертя під час коливань маси m ; C – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи; $F = F_0 \cos \omega t$ – рушійна збуджуюча сила, що приводить масу m в коливальний рух з круговою частотою ω ; t – поточний час динамічних процесів в системі; y – поточна координата положення маси m .

№ 16

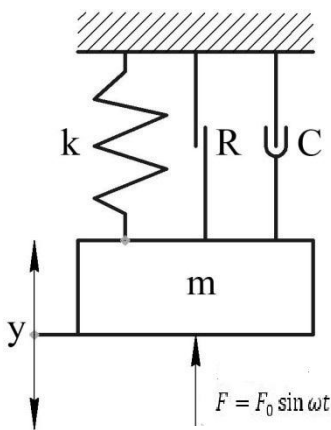


Рисунок 1

За динамічною моделлю механічної системи (рис. 1), скласти її математичну модель. На рис.1 наведено: m – масу системи; k – жорсткість пружного елемента, протидіючого рухові системи; R – сила сухого тертя під час руху системи; C – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи; $F = F_0 \sin \omega t$ – рушійна сила, що приводить систему в коливальний рух з круговою частотою ω ; F_0 – амплітуда сили F ; t – поточний час динамічних процесів в системі; y – поточна координата положення маси m .

№ 17

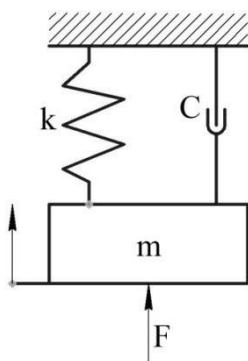


Рисунок 1

За динамічною моделлю механічної системи (рис. 1), скласти математичну модель цієї системи. На схемі зображено: m – маса механічної системи; F – рушійна сила; k – жорсткість пружного елемента системи; C – коефіцієнт в'язкого тертя під час руху системи; y – поточна координата (напрямок переміщення) положення маси m .

№ 18

Товщина стінки гідроциліндра $\delta = r_{зов} - r_{внут}$, призначеного для роботи за тиску робочої рідини (енергоносія) $p \geq 50$ МПа, розраховується за фор-

мулою $\delta = r_{внут} \cdot 2 \cdot p / (2,3 \cdot [\sigma] - p)$, де $[\sigma]$ – допустиме напруження розтягу матеріалу гідроциліндра. Взявши за цільову функцію $\psi_0(p, [\sigma]) = 2,3 \cdot [\sigma] - p$, що має обмеження $\psi_1(p) = \geq 0$ та $\psi_2([\sigma]) = -[\sigma] \leq 0$, знайти внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимальне значення тиску p_{opt} енергоносія в гідроциліндрі за якого товщина його стінки буде мінімальною.

№ 19

Зовнішній радіус гідроциліндра розраховується за формулою $r_{зов} = \sqrt{F[\sigma] / [\pi p([\sigma] - p\sqrt{3})]}$, де F – зусилля, що розвивається поршнем гідроциліндра; p – тиск робочої рідини (енергоносія) в гідроциліндрі. Взявши за цільову функцію $\psi_0(p) = \pi p([\sigma] - p\sqrt{3})$, знайти внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимальне значення тиску p_{opt} енергоносія в гідроциліндрі за якого його зовнішній радіус $r_{зов}$ буде мінімальним.

№ 20

Методом безумовної оптимізації знайти максимум цільової функції $\psi_0(b) = \tan \alpha / \tan(\alpha + \rho)$, де $\alpha = var$ – змінна проектування; $\rho = const$.

№ 21

Необхідно внутрішнім методом послідовної мінімізації оптимізувати цільову функцію $\psi_0(b_1, b_2) = 2b_1^2 + 3b_2^2$ (тут b_1 і b_2 – параметри оптимізації) за таких її обмежень: $\psi_1(b_1, b_2) = -b_1 \leq 0$; $\psi_2(b_1, b_2) = -b_2 \leq 0$.

№ 22

Знайти зовнішнім методом послідовної мінімізації оптимум цільової функції $\psi_0(b_1, b_2) = b_1^2 + 4b_2^2$ (тут b_1 і b_2 – параметри оптимізації) за такого її обмеження: $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 2 = 0$.

№ 23

За допомогою комбінованого (внутрішньо-зовнішнього) методу послідовної мінімізації визначити мінімум цільової функції $\psi_0(b_1, b_2) = -4b_1^2 + 8b_2^2$ (тут b_1 і b_2 – параметри оптимізації) за таких її обмежень: $\psi_1(b_1, b_2) = b_1 + b_2 - 2 = 0$; $\psi_2(b_1, b_2) = -\ln b_2 \leq 0$.

№ 24

Знайти методом умовної оптимізації мінімум цільової функції $\psi_0(b) = (b_1 - 2)^2 + (b_2 - 2)^2$ за таких її обмежень: $\psi_1 = -b_1 \leq 0$; $\psi_2 = -b_2 \leq 0$;

$\psi_3 = b_1 + b_2 - 4 \leq 0$. Розв'язати цю задачу методом множників Лагранжа (умовна оптимізація за умовою Куна – Такера) та порівняти результати.

№ 25

Методом умовної оптимізації мінімізувати цільову функцію $\psi_0(b) = (b_1 - 4)^2 + (b_2 - 4)^2$ за таких її обмежень: $\psi_1 = -b_1 \leq 0$; $\psi_2 = -b_2 \leq 0$; $\psi_3 = b_1 + b_2 - 8 \leq 0$.

№ 26

Методом множників Лагранжа (умовна оптимізація за умовою Куна – Такера) знайти співвідношення між змінними проектування b_1 та b_2 , за яких цільова функція $\psi_0(b) = a(b_1^2 + 2b_2^2)$ буде мінімальною. Обмеження цільової функції: $\psi_1 = b_1 \geq 0$; $\psi_2 = b_2 \geq 0$; $\psi_3 = b_1^{-4} + ab_2^{-4} - c = 0$, де $a = const$; $c = const$.

№ 27

Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $dy \cdot a - (y - b) dx = 0$, де $a = const$; $b = const$, а змінні y та x міняються, відповідно, в інтервалах $[y_0, y_1]$ і $[0, x_1]$.

№ 28

Розв'язати однорідне диференціальне рівняння другого порядку $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4 = 0$, де $y = f(t)$; за $t = 0$ $y(0) = 0$, а за $t = 2$ $y(2) = 5$.

№ 29

Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \sin \omega t$, що описує вимушені коливання механічної системи без тертя. У наведеному рівнянні: $y = f(t)$, де t – час протікання коливань, с; $\omega_0 = 200 \text{ c}^{-1}$ – частота вільних коливань механічної системи; $A_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ – максимальна амплітуда коливань в до резонансній зоні механічної системи.

№ 30

Методом скінченних різниць розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності $\partial t / \partial \tau = a \partial^2 t / \partial x^2$, що описує лінійний нестационарний процес зміни температури t в струні (діаметром струни знехтувати) в часі τ та по її довжині x . a – коефіцієнт теплопровідності матеріалу струни. Прийняти критерій Фур'є $F_{ox} = a \Delta \tau / h^2 = 0,5$ (тут $\Delta \tau$, h – відповідно інтервали розбивання часу τ процесу та довжини x струни). Розв'язок знайти в загальному вигляді для температури вузлової точки $t_{i, k+1}$, якщо

відомі температури сусідніх вузлових точок струни $t_{i+1, k}$ та $t_{i-1, k}$ в попередній момент часу k .

Література

1. Гухман А. А. : Введение в теорию подобия / А. А. Гухман – М. : Высш. шк., 1973. – 254с.
2. Асташев В. К. Динамика машин и управление машинами: Справочник/ Асташев В. К., Бабицкий В. И., Вульфсон И. И. и др.; под ред. Г. В. Крейнина. – М. : Машиностроение, 1988. – 240 с.
3. Іскович-Лотоцький Р. Д. Генератори імпульсів тиску для керування гідроімпульсними приводами вібраційних та віброударних технологічних машин : монографія / Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Архипчук М. Р. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця 2008. – 171 с.
4. Молчанов А. А. Моделирование и проектирование сложных систем / А. А. Молчанов – К. : Выща шк., Головное изд-во, 1988. – 359 с.
5. Добронравов В. В. Курс теоретической механики : учеб. для машиностроит. спец. вузов / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – [4-е изд. перераб. и доп.]. – М. : Высш. школа, 1983, – 575 с.
6. Обертюх Р. Р. Пристрої для віброточіння на базі гідроімпульсного привода : монографія / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 164 с.
7. Іскович-Лотоцький Р. Д. Процеси та машини вібраційних та віброударних технологій : монографія / Іскович-Лотоцький Р. Д., Обертюх Р. Р., Севостьянов І. В. – Вінниця : 2006. УНІВЕРСУМ – Вінниця – 291 с.
8. Бочаров Ю. А. Основы общей теории гидравлических кузнечно – штамповочных машин // Машины и технология обработки металлов давлением: Сб. науч. Трудов МВТУ №330. – М., 1980. – С. 12–40.
9. Решетов Д. Н. Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. и механических спец. вузов / Решетов Д. Н. – [4-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 1989.– 496 с.
10. Биргер И. А. Расчет на прочность деталей машин : справочник / Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иосилевич Г. Б. – [4-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Машиностроение, 1993.– 640 с.
11. Мяченков В. И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник / Мяченков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П. и др.; под общ. ред. Мяченкова В. И. – М. : Машиностроение, 1989.– 520 с.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике : пер. с англ. / Зенкевич О. – М. : Мир, 1975. – 544 с.
13. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
14. Хог Э. Прикладное оптимальное проектирование / Э. Хог, Я. Арора. – М. : Мир, 1983. – 479 с.

15. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. – М. : Мир, 1972. – 468 с.
16. Иосилевич Г. Б. Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. спец. вузов / Г. Б. Иосилевич – М. : Машиностроение, 1988. – 368 с.
17. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний : учеб. для вузов / В. Л. Бидерман – М. : Высш. школа, 1980. – 408 с.

